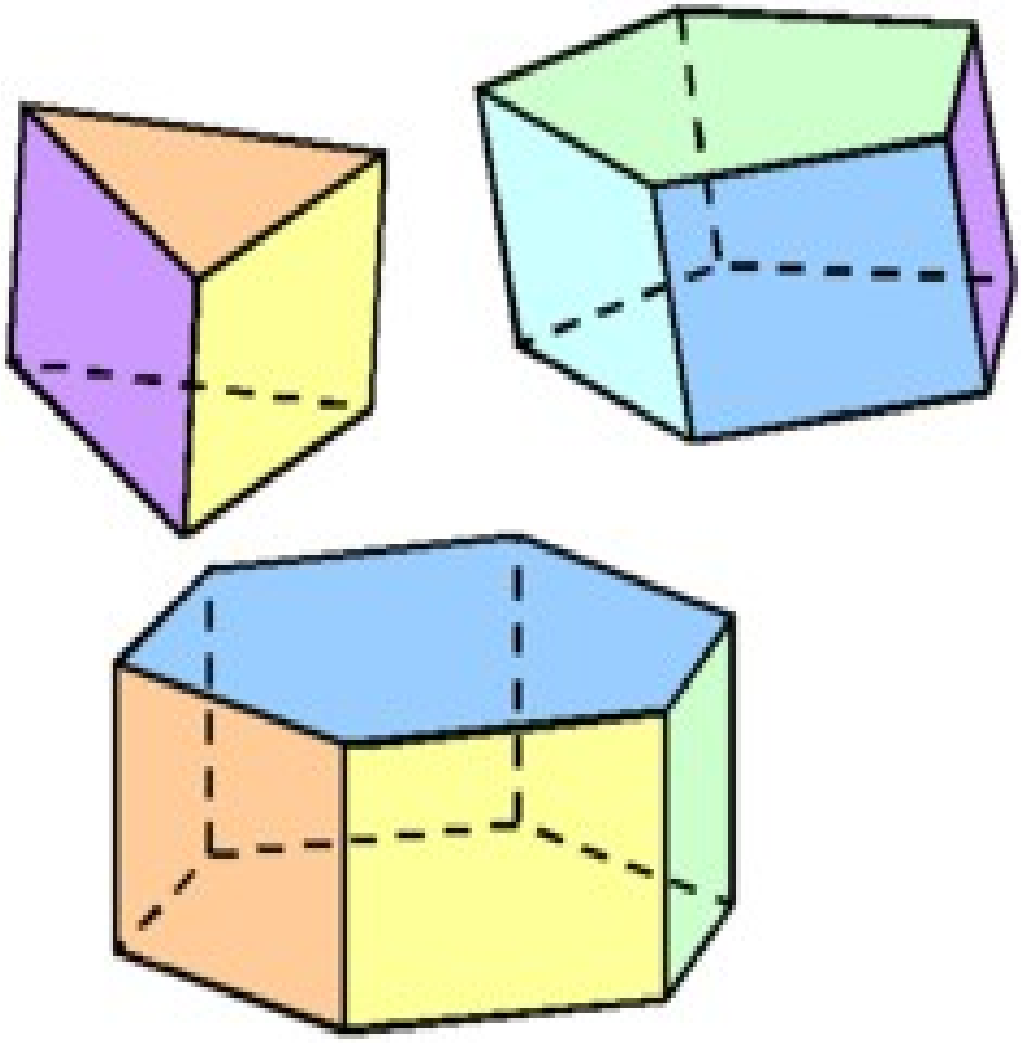
MATEMATICA
I LICEO



WIKIPEDIA
L'enciclopedia libera

CC BY SA

NOTE GENERALI SUL PROGETTO “LIBRI DI TESTO”

Questo è un progetto che avevo in mente di attuare da tempo: provare ad usare il materiale presente su Wikipedia e progetti correlati per creare dei libri di testo liberi per le scuole; tuttavia, a seguito di una discussione che ho intrapreso con altri utenti nel bar di Wikipedia è emerso che a quanto ho capito non esiste più un vero e proprio "programma ministeriale" per le scuole superiori. Ho capito inoltre che oggigiorno ogni scuola va abbastanza per conto suo nella definizione dei programmi di corso, motivo per cui è praticamente impossibile creare dei testi "standard" validi ovunque (e ci sarebbe da chiedersi perchè questa grande "libertà" è spesso correlata ai testi iperspecifici per ogni classe che i docenti adottano per i loro corsi... testi di cui spesso sono anche autori! :D). A questo problema si aggiunge il già citato iperspecialismo di volte voci che in molti casi può dare problemi ed il fatto che i testi sono spesso strutturati da un punto di vista più "didattico".
Ad ogni modo ho deciso comunque di proseguire il progetto per una serie di ragioni che illustro qui sotto, creando solo i testi del Liceo Classico da utilizzare come esempio pratico:

•fornire dei testi utilizzabili in quei contesti ove i testi "ufficiali" siano troppo costosi (es. terzo mondo)
•dimostrare la fattibilità del progetto a grandi linee
•fornire una critica all'attuale sistema di creazione dei programmi di corso e dei libri di testo scolastici. Davvero la "libertà editoriale" come è propagandata oggi tutela gli studenti e le famiglie? (Non dico che bisogna tornare al "testo unico" del ventennio, ma sarebbe interessante quantomeno studiare i conflitti di interesse nella creazione e nell'utilizzo dei testi)
•mostrare come la "massa" possa autogestire la creazione dei testi scolastici indipendentemente dagli editori e fornendo testi di qualità e gratuiti, oltre che più aderenti ad un punto di vista neutrale.
Per vari testi liberi relativi alla Letteratura Italiana, antica e straniera per tutti gli anni del corso si rimanda al progetto WikiSource o ad archive.org.

Galati Antonello

Sistema di equazioni lineari

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

*Disambiguazione – "Sistema lineare" rimanda qui. Se stai cercando il concetto di sistema lineare in teoria dei sistemi, vedi **Sistema dinamico lineare**.*

In matematica, e in particolare in algebra lineare, un **sistema di equazioni lineari**, anche detto **sistema lineare**, è un sistema composto da più equazioni lineari che devono essere verificate tutte contemporaneamente. Una soluzione del sistema è un vettore i cui elementi sono le soluzioni delle equazioni che compongono il sistema, ovvero tali che se sostituiti alle incognite rendono le equazioni delle identità.

Indice

Definizione
Forma matriciale
Matrice completa
Caratteristiche
Il sistema omogeneo associato
Lo spazio delle soluzioni
Strumenti per la risoluzione
Il metodo di riduzione
Note
Bibliografia
Voci correlate
Altri progetti
Collegamenti esterni

Definizione

Un sistema di equazioni lineari è un insieme di m equazioni lineari in n incognite, che può essere scritto nel modo seguente:[1][2]

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Il numero n delle incognite è detto anche ordine del sistema.

Se i termini noti b_i sono tutti nulli il sistema è detto *omogeneo*.

Una n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di elementi nel campo è una *soluzione* del sistema se soddisfa tutte le m equazioni.[3]

Due sistemi si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme di soluzioni. In particolare, due sistemi lineari sono equivalenti se ogni equazione di uno è combinazione lineare delle equazioni dell'altro.[4]

Forma matriciale

In notazione indiciale il sistema si scrive:

$$\sum_j^n a_{ij} x_j = b_i$$

Definendo i vettori dei coefficienti:

$$\mathbf{a}_i \equiv \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$$

e il vettore degli m termini noti:

$$\mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

il sistema è equivalente alla combinazione lineare:[1]

$$\sum_i^n a^i x_i = \mathbf{b}$$

Definendo $\mathbf{x}$ il vettore delle n incognite:

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ciascuna equazione è equivalente ad un prodotto scalare standard:[5]

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = b_1 \\ &\cdots \\ &\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x} = b_m \end{aligned}$$

Se il sistema è omogeneo il vettore delle incognite è quindi ortogonale ai vettori dei coefficienti.

Usando le matrici ed il prodotto scalare fra matrici (prodotto riga per colonna) si possono separare i coefficienti, le incognite ed i termini noti del sistema, scrivendolo nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ora se A è la matrice $m \times n$ dei coefficienti:

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

di cui in effetti $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n$ sono le colonne, con le definizioni del vettore delle incognite e di quello dei termini noti il sistema si scrive finalmente in forma matriciale:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Matrice completa

Il sistema può essere descritto usando la matrice completa:

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

detta matrice associata al sistema. Essa è ottenuta dalla giustapposizione della matrice dei coefficienti e del vettore dei termini noti.

Le matrici A e $(A, \mathbf{b})$ sono dette rispettivamente matrice *incompleta* (o matrice dei coefficienti) e *completa* (o *orlata*). I numeri $x_1, \ldots, x_n$ sono le incognite, i numeri a_{ij} sono i coefficienti ed i numeri b_i i termini noti. Coefficienti e termini noti sono elementi di un campo, ad esempio quello formato dai numeri reali o complessi.

Caratteristiche

Il grado di un sistema di equazioni polinomiali è definito come il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono. Quindi un sistema lineare è un sistema polinomiale di primo grado.

In generale, un sistema lineare può essere:

- *Determinato*, quando ha una sola soluzione.
- *Impossibile*, quando non ha nessuna soluzione.
- *Indeterminato*, quando ha infinite soluzioni.
- *Numerico*, quando le soluzioni sono rappresentate da numeri.
- *Letterale*, quando le soluzioni sono rappresentate da espressioni letterali.
- *Omogeneo*, quando i termini noti sono tutti zero.

Se il campo K di appartenenza di coefficienti e termini noti di un sistema di ordine n è infinito, ci sono tre possibilità: esiste una sola soluzione, non ci sono soluzioni oppure ce ne sono infinite. Il teorema che asserisce questo fatto e che permette di stabilire se e quante soluzioni esistono senza risolvere il sistema è il teorema di Rouché-Capelli. Nel caso in cui esistano soluzioni, queste formano un sottospazio affine di K^n.

Il sistema omogeneo associato

Si consideri l'operazione lineare:

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{i}^{n} x_i A^i$$

Il nucleo di L è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato, mentre l'immagine è lo spazio generato dalle colonne $A^1, \ldots, A^n$. Per il teorema del rango segue che la dimensione dello spazio delle soluzioni più il rango per colonne di A è pari ad n.

Essendo il vettore delle incognite ortogonale ai vettori riga della matrice dei coefficienti, lo spazio delle soluzioni è il complemento ortogonale del sottospazio generato dalle righe di A. La somma delle rispettive dimensioni deve pertanto essere pari ad n.

Dalle due affermazioni precedenti si conclude che il rango r per righe è pari al rango per colonne, e che lo spazio delle soluzioni ha dimensione $n - r$.[5] Lo spazio delle soluzioni è dunque un sottospazio vettoriale di dimensione $n - \rho(A)$.

Lo spazio delle soluzioni

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Teorema di Rouché-Capelli****.*

Il sistema ammette soluzione se e solo se il vettore $\mathbf{b}$ è l'immagine del vettore $\mathbf{x}$ ottenuta mediante l'applicazione lineare $L_A : K^n \to K^m$ definita nel seguente modo:

$$L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

L'immagine di L_A è generata dai vettori dati dalle colonne di A, e quindi $\mathbf{b}$ è nell'immagine se e solo se lo span delle colonne di A contiene $\mathbf{b}$, cioè se e solo se lo spazio generato dalle colonne di A è uguale allo spazio generato dalle colonne di $(A|\mathbf{b})$. In modo equivalente il sistema ammette soluzione se e solo se le due matrici abbiano lo stesso rango, come stabilisce il teorema di Rouché-Capelli.

Se esiste una soluzione $\mathbf{x_0}$, ogni altra soluzione si scrive come $\mathbf{x_0} + \mathbf{v}$, dove $\mathbf{v}$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato:[6]

$$A\mathbf{v} = 0$$

Infatti:

$$A(\mathbf{x_0} + \mathbf{v}) = A\mathbf{x_0} + A\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

Lo spazio delle soluzioni, ottenuto traslando il nucleo con il vettore $\mathbf{x_0}$, è quindi il sottospazio affine dato da:

$$\mathrm{Sol}(A, \mathbf{b}) = \mathbf{x_0} + \mathrm{Sol}(A, \mathbf{0})$$

La dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema completo è uguale alla dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.[7] Per il teorema di Rouché-Capelli tale soluzione è unica se e solo se il rango della matrice A è n. Altrimenti se il campo K è infinito esistono infinite soluzioni, e queste formano un sottospazio vettoriale di K^n, avente come dimensione la nullità $t = n - \mathrm{rk}(A)$ della matrice.

Strumenti per la risoluzione

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio: **Sistema di equazioni**.*

Dato un sistema lineare nella forma

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove $\mathbf{x}$ è il vettore colonna delle incognite, $\mathbf{b}$ è il vettore colonna dei termini noti e A è la matrice dei coefficienti ed è quadrata e invertibile, la soluzione è unica ed è pari al prodotto:

$$A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

dove A^{-1} è l'inversa di A. Il calcolo della matrice inversa è spesso complicato e oneroso dal punto di vista computazionale, ragion per cui un sistema lineare normalmente non viene risolto calcolando direttamente la matrice inversa.

Di grande importanza teorica per i sistemi lineari, ma non utilizzata in pratica per motivi simili, è la regola di Cramer.

Di uso generale per sistemi con migliaia di equazioni è invece il metodo di eliminazione di Gauss, che si basa sul metodo di riduzione.

Il metodo di riduzione

Il metodo di riduzione è specifico per i sistemi lineari. Il procedimento consiste nel sostituire una delle equazioni del sistema con una opportuna combinazione lineare di due equazioni del sistema stesso, ottenendo un sistema equivalente a quello dato. Più precisamente, se due righe sono espresse come prodotto tra opportune sottomatrici dei coefficienti e il vettore **x** delle soluzioni, ovvero

$$\begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{c} \\ B\mathbf{x} = \mathbf{d} \end{cases}$$

allora è possibile sostituire una delle due con l'equazione

$$m \cdot A\mathbf{x} + n \cdot B\mathbf{x} = m \cdot \mathbf{c} + n \cdot \mathbf{d}.$$

dove m e n sono due numeri scalari qualsiasi, entrambi diversi da zero.

Note

1. Lang, p. 61.
2. ^ Hoffman, Kunze, p. 3.
3. ^ Hoffman, Kunze, p. 4.
4. ^ Hoffman, Kunze, p. 6.
5. Lang, p. 176.

6. ^ Lang, p. 177.
7. ^ Lang, p. 178.

Bibliografia

- Serge Lang, *Algebra lineare*, Torino, Bollati Boringhieri, 1992, ISBN 88-339-5035-2.
- (EN) Kenneth Hoffman e Ray Kunze, *Linear Algebra*, 2ª ed., Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1971, ISBN 0-13-536821-9.
- F. Odetti e M. Raimondo, *Elementi di Algebra Lineare e Geometria Analitica*, ECIG, 1992, ISBN 88-7545-717-4.

Voci correlate

- Equazione lineare
- Principio di sovrapposizione
- Rango (algebra lineare)
- Regola di Cramer
- Sistema di equazioni
- Sistema non lineare
- Sottospazio affine
- Teorema di Rouché-Capelli

Altri progetti

- Wikiversità contiene risorse su **sistema di equazioni lineari**
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **sistema di equazioni lineari (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:System_of_linear_equations?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) Eric W. Weisstein, *Sistema di equazioni lineari*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	GND (DE) 4035826-4 (https://d-nb.info/gnd/4035826-4)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Sistema_di_equazioni_lineari&oldid=130407407"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 10 nov 2022 alle 22:23.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Regola di Cramer

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

La **regola di Cramer**, o **metodo di Cramer**, è un teorema di algebra lineare, che prende il nome dal matematico Gabriel Cramer, utile per risolvere un sistema di equazioni lineari usando il determinante, nel caso in cui il sistema abbia esattamente una soluzione.

Come algoritmo di calcolo è inefficiente. Pertanto, può essere effettivamente utilizzato solo per risolvere sistemi di poche equazioni. Tuttavia, esso è di grande importanza teorica in quanto dà un'espressione esplicita per la soluzione del sistema.

Indice

La regola
- Dimostrazione

Interpretazione geometrica

Esempio
- Due per due
- Tre per tre

Applicazioni alla geometria differenziale

Problemi nell'applicazione

Bibliografia

Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

La regola

Un sistema di equazioni lineari può essere rappresentato usando moltiplicazione fra matrici come:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$$

dove A è una matrice e $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{c}$ sono due vettori. Se A è una matrice quadrata (cioè il numero di incognite del sistema è pari al numero di equazioni) ed è anche invertibile (determinante diverso da zero cioè rango della matrice uguale al numero di incognite), il teorema di Rouché-Capelli asserisce che il sistema ha esattamente una soluzione.

In questo caso, la regola di Cramer fornisce un algoritmo per calcolare la soluzione $(x_1, \ldots, x_n)$ usando il determinante nel modo seguente:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

dove A_i è la matrice formata sostituendo la i-esima colonna di A con il vettore $\boldsymbol{c}$. Si nota che la condizione di invertibilità di A garantisce che il denominatore $\det(A)$ sia diverso da zero, e quindi che l'espressione descritta abbia sempre senso.

Dimostrazione

La dimostrazione tiene conto di due proprietà dei determinanti:

- Se si somma una colonna a un'altra, il valore del determinante non cambia;

- Se si moltiplica ogni elemento di una colonna per un certo fattore, il determinante risulterà moltiplicato di altrettanto.

Dato un sistema di n equazioni lineari in n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{cases}$$

La regola di Cramer fornisce, per il valore di x_1, l'espressione:

$$\frac{\det \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

che può essere verificata adoperando le suddette proprietà del determinante. Infatti, stando al sistema, il quoziente riportato è equivalente a:

$$\frac{\det \begin{vmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Sottraendo dalla prima colonna la seconda moltiplicata per x_2, la terza colonna moltiplicata per x_3 ecc., e la n-sima colonna moltiplicata per x_n, si ottiene l'espressione:

$$\frac{\det \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

e, stando alla seconda proprietà del determinante, questo equivale a:

$$\frac{x_1 \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} = x_1$$

Allo stesso modo, se la colonna di $\boldsymbol{b}$ si trova al posto della $\boldsymbol{k}$-sima colonna della matrice del sistema di equazioni, il risultato sarà uguale a $\boldsymbol{x_k}$. Pertanto si ottiene:

$$x_1 = \frac{\det \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\det \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Interpretazione geometrica

La regola di Cramer può essere mostrata utilizzandone l'interpretazione geometrica. Si consideri il caso di due equazioni in due incognite:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

che si può vedere come un'equazione tra vettori:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

L'area del parallelogramma determinato da:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

è data dal determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

In generale, quando vi sono più equazioni di più variabili, il determinante di $\boldsymbol{n}$ vettori di lunghezza $\boldsymbol{n}$ fornisce il volume del parallelepipedo che essi formano nello spazio euclideo di dimensione $\boldsymbol{n}$. Quindi, l'area del parallelogramma determinato da:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

deve anche essere $\boldsymbol{x_1}$ volte l'area del primo, dal momento che uno dei lati è stato moltiplicato per tale fattore. Quest'ultimo parallelogramma ha, per il principio di Cavalieri, la stessa area del parallelogramma formato da:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Uguagliando le aree dell'ultimo e del secondo parallelogramma si ottiene l'equazione:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} \\ a_{21}x_1 & a_{22} \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

da cui segue la regola di Cramer.

Esempio

Due per due

Un sistema con 2 equazioni e 2 incognite:

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

espresso in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

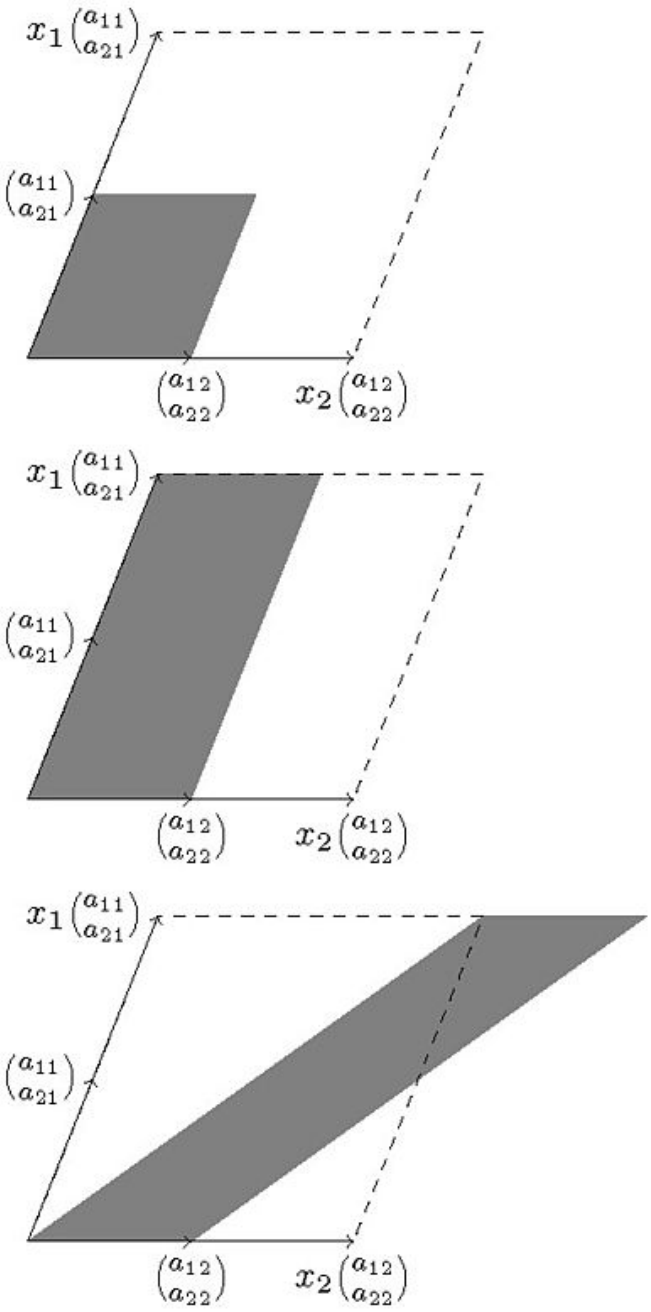
ha un'unica soluzione se e solo se il determinante di:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

è diverso da zero. In questo caso, la soluzione (x, y) è data da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$



Interpretazione geometrica della regola di Cramer. Le aree del secondo e terzo parallelogramma sono uguali, mentre l'area del secondo è x_1 volte quella del primo. Da tale uguaglianza segue la regola.

Tre per tre

Analogamente, un sistema con 3 equazioni e 3 incognite:

$$\begin{cases} ax + by + cz = j \\ dx + ey + fz = k \\ gx + hy + iz = l \end{cases}$$

può essere scritto come prodotto fra matrici e vettori nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

Se la matrice 3×3 ha determinante diverso da zero, il sistema ha una sola soluzione (x, y, z) data da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

Il determinante di una matrice 3 per 3 può essere calcolato utilizzando la regola di Sarrus.

Applicazioni alla geometria differenziale

La regola di Cramer è estremamente utile per scrivere delle formule in geometria differenziale. Ad esempio, date due equazioni:

$$F(x, y, u, v) = 0 \qquad G(x, y, u, v) = 0$$

in quattro variabili, due delle quali dipendono dalle altre nel modo seguente:

$$x = X(u, v) \qquad y = Y(u, v)$$

è possibile calcolare (ipotizzando che tutte queste funzioni siano sufficientemente derivabili):

$$\partial x / \partial u$$

usando la regola di Cramer, nel modo seguente.

Prima si calcolino le prime derivate di F, G, x ed y:

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = 0 \\ dG &= \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial u}du + \frac{\partial G}{\partial v}dv = 0 \\ dx &= \frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv \\ dy &= \frac{\partial Y}{\partial u}du + \frac{\partial Y}{\partial v}dv \end{aligned}$$

Sostituendo dx, dy in dF e in dG, si ha:

$$\begin{aligned} dF &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v}\right)dv = 0 \\ dG &= \left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial v}\right)dv = 0 \end{aligned}$$

Poiché u, v sono entrambe indipendenti, i coefficienti di du, dv devono essere zero. Così si possono scrivere le equazioni per i coefficienti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} &= -\frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} &= -\frac{\partial G}{\partial v} \end{aligned}$$

Ora, dalla regola di Cramer, si vede che:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ -\frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

Questa è ora una formula in termini di due Jacobiane:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\left(\frac{\partial (F,G)}{\partial (y,u)}\right)}{\left(\frac{\partial (F,G)}{\partial (x,y)}\right)}$$

Formule simili possono essere derivate per $\partial x/\partial v$, $\partial y/\partial u$ e $\partial y/\partial v$.

Problemi nell'applicazione

Come accennato nell'introduzione, il metodo di Cramer è adatto per calcolare la soluzione di sistemi lineari $N \times N$, solo se N è molto piccolo. In pratica, il metodo richiede il calcolo di $N+1$ determinanti di matrici $N \times N$. Applicando la regola di Leibnitz, ciascuno di questi richiede $N!$ moltiplicazioni, per un totale di $(N+1)!$ moltiplicazioni. Un numero che diventa rapidamente enorme al crescere di N. Se si trascura il tempo necessario per effettuare le addizioni, un calcolatore che esegue un milione di moltiplicazioni al secondo impiegherebbe circa otto mesi per risolvere un sistema lineare di 15 equazioni, tempo che supererebbe il milione e mezzo di anni se le equazioni fossero 20.

In alternativa, gli $N+1$ determinanti possono essere calcolati tramite l'algoritmo di Gauss che è estremamente più veloce, $O(N^3)$ moltiplicazioni. Però, questo è un *sottoprodotto* del metodo di eliminazione di Gauss per la soluzione di un sistema lineare associato alla stessa matrice. Quindi, è molto più rapido risolvere il sistema lineare di partenza utilizzando direttamente il metodo di Gauss una sola volta.

Bibliografia

- (EN) Colin MacLaurin, *A Treatise of Algebra, in Three Parts.*, 1748.
- (EN) Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, 2nd, Wiley, 1968, p. 431.
- (EN) Victor Katz, *A History of Mathematics*, Brief, Pearson Education, 2004, pp. 378-379.
- (EN) Bruce A. Hedman, *An Earlier Date for "Cramer's Rule"*, in *Historia Mathematica*, 4(26), n. 4, 1999, pp. 365-368, DOI:10.1006/hmat.1999.2247.

Voci correlate

- Determinante
- Matrice
- Metodo di eliminazione di Gauss
- Sistema di equazioni lineari
- Gabriel Cramer

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file sulla **regola di Cramer (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Cramer%27s_rule?uselang=it)**

Collegamenti esterni

- (EN) *Regola di Cramer*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Regola di Cramer*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- (FR) Cramer, Gabriel, *Introduction à l'Analyse des lignes Courbes algébriques*, su *europeana.eu*, Geneva, Europeana, 1750, pp. 656-659. URL consultato il 18 maggio 2012.

- (**EN**) *Proof of Cramer's Rule*, su *planetmath.org*. URL consultato il 19 gennaio 2014 (archiviato dall'url originale il 22 settembre 2015).
- (**EN**) *WebApp descriptively solving systems of linear equations with Cramer's Rule*, su *sole.ooz.ie*. URL consultato il 19 gennaio 2014 (archiviato dall'url originale il 25 aprile 2011).
- (**EN**) *Online Calculator of System of linear equations*, su *elektro-energetika.cz*. URL consultato il 19 gennaio 2014 (archiviato dall'url originale il 22 gennaio 2014).

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Regola_di_Cramer&oldid=133652231"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 24 mag 2023 alle 10:06.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

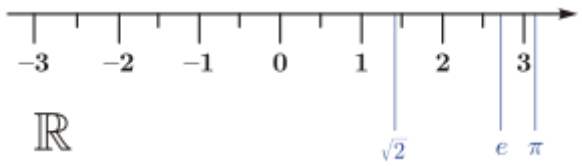
WIKIPEDIA

Numero reale

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, i **numeri reali** possono essere descritti in maniera non formale come numeri ai quali è possibile attribuire uno sviluppo decimale finito o infinito, come $\pi = 3,141592\ldots$ I numeri reali possono essere positivi, negativi o nulli e comprendono, come casi particolari, i numeri interi (come 12), i numeri razionali (come $-22/7$) e i numeri irrazionali algebrici (come $\sqrt{2}$) e trascendenti (come π ed e). Un numero reale razionale presenta uno sviluppo decimale finito o periodico; ad esempio $1/3 = 0,333333\ldots$ è razionale. L'insieme dei numeri reali è generalmente indicato con la lettera **R** o $\mathbb{R}$.

I numeri reali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta, detta *retta numerica* o *retta reale*.



Rappresentazione della retta reale

La definizione formale dei numeri reali ha rappresentato uno degli sviluppi più significativi del XIX secolo. Tra le definizioni maggiormente adottate oggi figurano le classi di equivalenza di successioni di Cauchy di numeri razionali, le sezioni di Dedekind, una ridefinizione del termine "rappresentazione decimale" e una definizione assiomatica come unico *campo archimedeo completo ordinato*.

I termini *reale* e *immaginario* sono stati introdotti ne *La Géometrie* di René Descartes (1637), relativamente allo studio delle radici delle equazioni. Per estensione diversi autori hanno cominciato a parlare di *numeri reali* e *numeri immaginari*. Nel 1874 appare un articolo fondamentale di Georg Cantor nel quale l'autore prende in considerazione l'insieme dei numeri reali dimostrando che tale insieme non è numerabile.

Indice

Rappresentazione e uso dei numeri reali
- Rappresentazione decimale
- Operazioni sui numeri reali
- I numeri reali nella scienza e nella tecnologia

Storia
- Frazioni
- Numeri come lunghezze
- Sviluppo decimale illimitato non periodico
- Successioni e serie
- Calcolo infinitesimale
- Costruzione dei numeri reali

Definizione
- Approccio assiomatico

Insieme reale esteso

Proprietà

Completezza

Successioni di Cauchy

Elemento separatore

Assioma di Archimede

Cardinalità

Densità dei numeri razionali nell'insieme dei numeri reali

Dimostrazione

Caso I

Caso II

Caso III

Densità dei numeri irrazionali nell'insieme dei numeri reali

Dimostrazione

Metrica e topologia

Struttura lineare

Misura

Algebra

Logica

Generalizzazioni ed estensioni

Note

Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Rappresentazione e uso dei numeri reali

I numeri reali possono rappresentare qualsiasi grandezza fisica, come il prezzo di un prodotto, la distanza temporale fra due eventi, l'altitudine (positiva o negativa) di un sito geografico, la massa di un atomo o la distanza fra galassie. Gran parte dei numeri reali è usata quotidianamente, ad esempio in economia, informatica, matematica, fisica o ingegneria.

Di fatto, la maggior parte delle volte sono usati solo alcuni sottoinsiemi:

- i numeri naturali;
- i numeri interi;
- i numeri razionali, cioè i numeri esprimibili sotto forma di frazione;
- i numeri irrazionali, cioè i numeri che non sono esprimibili sotto forma di frazione, e non fanno quindi parte dei numeri razionali, come $\sqrt{2}$, e e π.

Parallelamente a questa suddivisione, è possibile evidenziarne un'altra:

- l'insieme dei numeri algebrici, che comprende tutti e soli i numeri che possono essere soluzione di un'equazione a coefficienti razionali, come $\sqrt{2}$;

- l'insieme dei numeri trascendenti, formato dai numeri non algebrici, come e e π.

Questi insiemi, benché infiniti, hanno cardinalità numerabile, tranne l'insieme dei numeri irrazionali e l'insieme dei numeri trascendenti, che hanno la cardinalità del continuo.

Rappresentazione decimale

Ogni numero reale può essere identificato dalla sua numerazione decimale, ovvero mediante l'elenco delle cifre decimali della sua parte intera e, separate da una virgola, l'elenco delle cifre della parte frazionaria. In generale il numero di cifre decimali della parte frazionaria può essere infinito. Per questo in pratica il numero reale viene espresso presentando solo le prime cifre decimali come ad esempio nella scrittura $324,823211247\ldots$ dove i tre punti esprimono il fatto che ci sono altre, infinite, cifre. Con questo procedimento di approssimazione è possibile presentare un numero razionale arbitrariamente vicino al numero reale in questione. Più sono le cifre decimali, più il numero razionale è vicino al numero reale che si vuole rappresentare, e maggiore quindi è la precisione dell'approssimazione. Ad esempio, pi greco può essere approssimato come

> 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679...

La rappresentazione decimale, molto utile nelle scienze applicate, presenta molti difetti dal punto di vista matematico, ad esempio:

- Alcuni numeri razionali hanno due espansioni decimali diverse, ad esempio 0,999...:

$$0,\bar{9} = 0,999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} - 1\right) = 9\left(\frac{1}{1-1/10} - 1\right) = 1.$$

  Si può dimostrare che l'espansione decimale di un reale è unica a meno che il numero non sia della forma $\frac{q}{10^m}$, con q e m interi non negativi.
- La somma e la moltiplicazione fra numeri reali non si effettuano "cifra per cifra" nel modo abituale per gli interi, perché dovremmo "partire dalla cifra più a destra" e questo non è praticamente possibile poiché con questa notazione si hanno infinite cifre dopo la virgola.
- La rappresentazione è ancorata alla scelta della base 10, e quindi non è "canonica" nel senso che potrebbero esserci delle proprietà del numero che vengono evidenziate solo perché tale numero è rappresentato in base 10 e che non si presenterebbero se fosse rappresentato in un'altra base o, più in generale, in un'altra notazione.

Per questo motivo i matematici preferiscono definire e trattare i numeri reali con altre notazioni più astratte.

Operazioni sui numeri reali

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Operazioni aritmetiche sui numeri reali****.*

Sui numeri reali è possibile fare tutte le operazioni definite per i razionali, quali somma, differenza, prodotto, divisione per un numero diverso da zero ed elevamento a potenza con base positiva. Tali operazioni possono essere definite tramite il calcolo infinitesimale oppure è possibile estendere ai numeri reali, mediante approssimazione, le definizioni delle medesime operazioni date sui numeri razionali.

I numeri reali nella scienza e nella tecnologia

Dal punto di vista fisico, ogni esperimento è soggetto in modo intrinseco a un errore e quindi questo tipo di rappresentazione approssimata dei numeri reali non causa ulteriori problemi.

In informatica, i computer possono solo approssimare i numeri reali con numeri razionali: queste approssimazioni sono realizzate ad esempio in modo efficiente tramite la scrittura in virgola mobile. Alcuni programmi riescono a trattare alcuni numeri non razionali in modo esatto: ad esempio alcuni numeri algebrici possono essere descritti utilizzando la loro descrizione algebrica (come per esempio $\sqrt{2}$) piuttosto che la loro approssimazione decimale.

Più in generale, l'informatica può trattare in modo preciso solo i numeri *calcolabili*: un numero reale è calcolabile se esiste un algoritmo che produce le sue cifre. Poiché esiste un'infinità numerabile di algoritmi ma un'infinità non numerabile di numeri reali, "quasi tutti" i numeri reali non sono calcolabili.

In matematica, i numeri reali giocano un ruolo fondamentale, e vengono continuamente manipolati, nonostante gran parte di questi non siano calcolabili. Il costruttivismo è una corrente matematica che accetta l'esistenza solo dei reali calcolabili.

Storia

Frazioni

La necessità di dare un nome ad alcune grandezze misurabili data dell'antichità. La prima risposta, realizzata dai Sumeri e nell'antico Egitto, fu quella di costruire le frazioni ($^{a}/_{b}$). Questo strumento permise subito la misura di qualsiasi grandezza positiva con precisione arbitraria.

Numeri come lunghezze

La prima formalizzazione matematica nota è quella di Euclide nel III secolo a.C. Negli Elementi di Euclide, la geometria è formalizzata con assiomi, teoremi e dimostrazioni. Qui i numeri sono messi in corrispondenza con le lunghezze dei segmenti.

L'approccio di Euclide mette in evidenza che i numeri dell'epoca (le frazioni, cioè i numeri razionali) non potevano svolgere direttamente il ruolo di rappresentare le lunghezze di segmenti.

Un caso particolare del teorema di Pitagora mostra infatti che la lunghezza l dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti hanno lunghezza 1

$\sqrt{2}$ non è razionale

Supponiamo per assurdo che esistano due numeri interi p e q tali che

$$2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Possiamo supporre che la frazione sia ridotta, ovvero che p e q siano primi fra di loro. Quindi

$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$

Ne segue che 2 divide p^2, e quindi p è pari. Quindi $p = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Otteniamo:

, è tale che

$$l^2 = 2.$$

D'altra parte, è facile mostrare che una tale l non è esprimibile come frazione: un risultato che risale alla scuola pitagorica ed era ben noto a Euclide. Una dimostrazione del risultato pitagorico, citata da Paul Erdős come una delle più belle di tutta la matematica, è mostrata a destra.

$$2 \cdot k^2 = q^2,$$

e allora anche q è pari, in contraddizione con il fatto che p e q siano coprimi. Dunque deve essere falsa l'ipotesi iniziale, cioè $\sqrt{2}$ non può essere razionale.

Per risolvere l'apparente contraddizione Euclide, nel V libro degli *Elementi*, sviluppa una raffinata teoria dei rapporti tra grandezze (anche tra loro incommensurabili). Occorreva per questo innanzitutto avere un criterio per giudicare l'eventuale uguaglianza di due rapporti tra incommensurabili. Euclide fornisce un tale criterio nelle definizioni 4-9 del V libro, che riportiamo in una forma leggermente modernizzata nelle notazioni:

Date quattro grandezze a, b, c, d, si dice che $a : b = c : d$ se e solo se per ogni coppia di naturali, m, n, si verifica sempre una delle seguenti tre possibilità:

- $na < mb$ e, contemporaneamente, $nc < md$;
- $na = mb$ e, contemporaneamente, $nc = md$;
- $na > mb$ e, contemporaneamente, $nc > md$.

Grazie alla definizione precedente di uguaglianza tra rapporti anche i rapporti tra incommensurabili divennero un legittimo oggetto di studio della matematica e la loro eventuale uguaglianza era decisa semplicemente confrontando multipli interi delle grandezze considerate. In altre parole ogni rapporto tra incommensurabili era caratterizzato dal suo comportamento rispetto a tutte le coppie di naturali.

Altri sviluppi della matematica ellenistica che anticiparono in parte la moderna teoria dei reali furono quelli presenti nel metodo che fu poi detto *di esaustione*; ricordiamo che anche il primo calcolo di somme di serie risale ad Archimede (che sommò la serie geometrica di ragione $1/4$).

Sviluppo decimale illimitato non periodico

Con l'ausilio delle frazioni i greci potevano esprimere con precisione arbitraria qualsiasi numero reale. L'assenza di un sistema di numerazione adeguato rendeva però difficili le operazioni elementari fra queste quantità, quali ad esempio la somma o la divisione.

Si deve attendere fino al V secolo per vedere finalmente riconosciuto lo zero come numero dalla scuola indiana, e per lo sviluppo del sistema di numerazione decimale.

Con il sistema di numerazione decimale compare un nuovo problema. Con questo sistema, ogni frazione possiede uno sviluppo decimale *periodico* ovvero la successione di decimali reitera all'infinito la stessa sequenza di numeri. Che significato dare a un oggetto avente uno sviluppo non periodico? Un esempio è il seguente

al-Khwarizmi, matematico persiano, in un francobollo sovietico commemorativo

0,1010010001... dove il numero di zeri tra due "1" consecutivi cresce a ogni passo.

Successioni e serie

Nella seconda metà del XVII secolo, si assiste a un interessamento straordinario da parte dei matematici al calcolo delle serie e successioni. Tra questi, Nicolaus Mercator, i Bernoulli, James Gregory, Gottfried Leibniz lavorano su delle serie che sembrano convergere a un limite non razionale, come ad esempio:

- la serie di Mercator: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ che converge a $\ln(2)$
- la serie di Grégory: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ che converge a $\pi/4$

Inoltre Joseph Liouville mostra nel 1844 l'esistenza di numeri trascendenti, cioè di numeri che non sono radici di nessun polinomio a coefficienti interi. Non è quindi sufficiente aggiungere i numeri algebrici ai razionali per ottenere "tutti i numeri".

Calcolo infinitesimale

Gottfried Leibniz

Durante la seconda parte del XVII secolo, Isaac Newton e Gottfried Leibniz inventano una nuova branca della matematica, chiamata adesso analisi matematica, e conosciuta all'epoca come calcolo infinitesimale. Questa raggiunge subito la massima notorietà perché alla base di una nuova teoria fisica universale: la meccanica classica e la teoria della gravitazione universale.

Il calcolo infinitesimale necessita di un insieme di numeri più grande dei razionali, che "comprenda tutti i buchi", in modo da stare tutti su una retta, detta *retta reale*.

Nel linguaggio moderno, la proprietà necessaria al calcolo è la completezza, e può essere espressa nel modo seguente:

ogni successione di Cauchy è convergente.

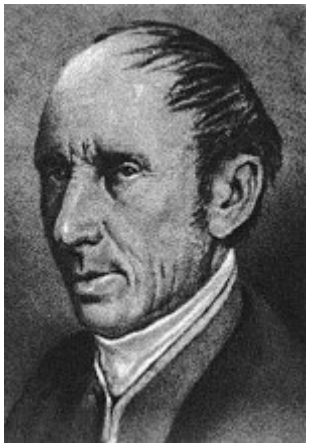
Tale nozione, introdotta successivamente proprio da Cauchy, è estremamente importante in tutti i settori della matematica, e sarà anche all'origine della topologia all'inizio del XX secolo.

Costruzione dei numeri reali

Il calcolo infinitesimale permette un'intuizione sempre più precisa sulla topologia dei numeri. Sarà necessario un ulteriore secolo per formalizzare in modo preciso l'insieme dei numeri reali, cioè per "tappare i buchi" lasciati dai razionali.

Come spesso accade in matematica, quando il problema è maturo, la soluzione arriva contemporaneamente da due ricercatori.

Il primo ad affrontare con successo la costruzione dei numeri reali è Augustin-Louis Cauchy. Il suo approccio resta il più fruttuoso, perché si applica anche ad altri casi. La sua idea è la seguente: una successione *dovrebbe* convergere se gli elementi sono (dopo un certo punto) arbitrariamente vicini fra loro: una tale successione è oggi detta successione di Cauchy.


Augustin-Louis Cauchy

Questa idea si traduce in una definizione rigorosa dei numeri reali solo verso la fine del XIX secolo, grazie ai lavori di Cantor e Dedekind nel 1872. Quest'ultimo propone in *Was sind und was sollen die Zahlen* (Cosa sono e cosa devono essere i numeri) un metodo che sfrutta la relazione d'ordine fra le frazioni. La sua idea consiste nell'introdurre i reali non razionali tramite coppie di sottoinsiemi di razionali, i cosiddetti *tagli di Dedekind*: ad esempio, la radice di 2 è rappresentata dalla coppia di insiemi, il primo è l'insieme di tutti i numeri razionali negativi o il cui quadrato è minore di 2, il secondo è l'insieme di tutti i numeri razionali positivi il cui quadrato è maggiore di 2. Vi è un evidente rapporto tra la definizione di Dedekind e l'antica definizione di Euclide, ma anche una profonda differenza: mentre per Euclide e per gli altri matematici greci l'oggetto privilegiato di studio erano le grandezze e solo considerando i loro rapporti si trovavano di fronte a qualcosa di parzialmente analogo ai nostri numeri reali, all'epoca di Dedekind le grandezze numeriche avevano assunto da tempo un ruolo di protagonisti autonomi.

Definizione

Approccio assiomatico

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Costruzione dei numeri reali****.*

Sia $\mathbb{R}$ l'insieme di tutti i numeri reali. Allora:

- L'insieme $\mathbb{R}$, con somma e moltiplicazione usuali, è un campo, essendo valide le proprietà associativa, commutativa, distributiva e di esistenza degli elementi neutri e inversi rispetto a entrambe le operazioni.
- Il campo $\mathbb{R}$ è ordinato, cioè esiste un ordinamento totale, il $\leq$ usuale, tale che, per tutti i numeri reali x, y e z:
  - per ogni coppia $x, y \in \mathbb{R}$ si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (dicotomia)
  - $x \leq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (riflessiva)
  - se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (antisimmetrica)
  - da $x \leq y$ e $y \leq z$ segue che $x \leq z$ (transitiva)
- Assioma di Dedekind: L'ordinamento è *completo*, cioè ogni sottoinsieme non vuoto S di $\mathbb{R}$ che ammette un maggiorante in $\mathbb{R}$ ha un estremo superiore in $\mathbb{R}$. L'estremo superiore di un insieme S si denota con $\sup S$.

L'ultima proprietà è quella che differenzia i reali dai razionali.

Per esempio, l'insieme dei numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 ha un maggiorante razionale (per esempio $1,5$) ma l'estremo superiore, che è il minore dei maggioranti, non è razionale in quanto la radice quadrata di 2 non è razionale.

I numeri reali son definiti in modo univoco dalle proprietà precedenti.

Detto in modo più preciso, dati due campi ordinati completi $\mathbb{R}_1$ e $\mathbb{R}_2$, esiste un unico isomorfismo da $\mathbb{R}_1$ a $\mathbb{R}_2$. Questa proprietà permette di pensare a essi come a un unico oggetto matematico.

Insieme reale esteso

L'*insieme reale esteso* si ottiene ampliando l'insieme dei numeri reali con due elementi aggiuntivi, indicati con $-\infty$ e $+\infty$:

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

La relazione d'ordine si estende a questi nuovi punti ponendo:

$-\infty < x < +\infty$ per ogni x reale.

Alcune delle normali operazioni di somma e prodotto possono essere estese all'insieme reale esteso, ma non tutte. In particolare tale insieme non è più un campo e neppure un gruppo.

L'insieme reale esteso è però dotato di una topologia che estende quella dei numeri reali: un intorno di $+\infty$ (risp. $-\infty$) è una semiretta destra (risp. sinistra). Questo insieme è quindi spesso usato per definire in modo più uniforme il concetto di limite, e considerare alla stessa stregua le successioni che convergono a un numero reale o all'infinito.

Proprietà

Completezza

La ragione principale che ha portato all'introduzione dei reali è che essi costituiscono uno spazio "senza buchi". Più precisamente, i reali sono uno spazio metrico completo. La completezza può essere espressa in vari modi, tutti equivalenti all'assioma di Dedekind descritto sopra.

Successioni di Cauchy

Nei numeri reali vale, per definizione di completezza, il fatto seguente:

> *Ogni successione di Cauchy ha un limite*.

Ricordiamo che:

- Una successione (x_n) di numeri reali è *di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero M tale che

  $$|x_n - x_m| < \varepsilon \; \forall n, m > M.$$

  In altre parole, una successione è una successione di Cauchy se i suoi elementi x_n a un certo punto diventano arbitrariamente vicini.

- Una successione (x_n) *ha un limite* x se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero N tale che

  $$|x_n - x| < \varepsilon \; \forall n > N.$$

> In altre parole, una successione ha limite x se i suoi elementi a un certo punto diventano arbitrariamente vicini a x.

In uno spazio metrico qualsiasi, ogni successione convergente è una successione di Cauchy. Quando è vero anche l'opposto (come nei numeri reali), lo spazio si dice *completo*.

L'insieme dei razionali non è completo. Per esempio, la successione delle prime n cifre della radice quadrata di 2, ossia

> 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421;...

è di Cauchy ma non converge a un numero razionale.

Elemento separatore

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Assioma di Dedekind****.*

La completezza dei numeri reali può essere espressa nel modo seguente: dati due sottoinsiemi X, Y non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che

$$x \leq y \, \forall x \in X, y \in Y$$

esiste un numero reale z tale che

$$x \leq z \leq y \, \forall x \in X, y \in Y.$$

Assioma di Archimede

Per i numeri reali vale l'*assioma di Archimede*: dati due numeri x, y reali positivi, con $x < y$, esiste un numero naturale n tale che

$$nx \geq y.$$

Un campo ordinato in cui vale questo assioma è detto *archimedeo*. David Hilbert definisce il campo dei numeri reali come il "*campo completo archimedeo*": con questa frase, Hilbert sottolinea il fatto che i numeri reali formano il *più grande* campo archimedeo, nel senso che ogni altro campo archimedeo è contenuto in $\mathbb{R}$. In questo senso, $\mathbb{R}$ è "completo" secondo Hilbert.

Questo significato di completezza è il più vicino alla costruzione dei numeri reali a partire dai numeri surreali, poiché la costruzione comincia con una classe che contiene ogni campo ordinato (i surreali) e seleziona da essa il più grande sottocampo archimedeo.

Cardinalità

A differenza dei numeri razionali, i reali non formano un insieme numerabile; l'insieme dei numeri reali è "strettamente più grande" di quello dei numeri naturali (pur considerando che entrambi sono infiniti). Formalmente, questo equivale a dire che non esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali e i numeri naturali.

Questo fatto distingue i numeri reali dagli altri insiemi numerici normalmente utilizzati. Infatti gli insiemi dei numeri naturali, razionali, algebrici hanno tutti la stessa cardinalità (ovvero possono essere messi in corrispondenza biunivoca), mentre l'insieme dei reali ha una *cardinalità superiore*: esiste una funzione

iniettiva dai numeri razionali ai reali, ma non viceversa.

In altre parole, nel tappare tutti i buchi lasciati dai numeri razionali si deve aggiungere una "tale quantità" di numeri nuovi da farne crescere la cardinalità. Questo fatto può essere dimostrato con il procedimento diagonale di Cantor.

Effettivamente, l'insieme $\mathbb{R}$ ha cardinalità $2^{\aleph_0}$, la stessa dell'insieme delle parti di un insieme numerabile: ovvero, la stessa cardinalità dell'insieme di tutti i sottoinsiemi dei numeri naturali.

Poiché anche i numeri algebrici hanno cardinalità numerabile, "quasi tutti" i numeri reali sono trascendenti.

L'ipotesi del continuo sostiene la non esistenza di una cardinalità intermedia fra quella degli interi e quella dei reali. Nell'ambito della teoria degli insiemi di Zermelo - Fraenkel, che è quella comunemente usata, questa ipotesi non può essere né dimostrata né confutata, cioè è indipendente dai suoi assiomi.

Densità dei numeri razionali nell'insieme dei numeri reali

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è denso nell'insieme dei numeri reali.

Dimostrazione

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, allora $\exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$

Caso I

a e b sono discordi: $a < 0 < b$
$0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}, q = 0$.

Caso II

a e b sono ambedue positivi: $0 < a < b$

Dato che $0 < a < b$ si ha che $b - a > 0$ e che anche $\frac{1}{b-a} > 0 \in \mathbb{R}$ quindi per la proprietà archimedea dei numeri reali $\exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a}$, quindi:

$$\frac{1}{b-a} < n$$
$$n(b-a) > 1$$
$$nb - na > 1$$
$$nb > na + 1$$
$$\mathbf{na+1 < nb.}$$

Sia $X = \{k \in \mathbb{N} | k > na\}$, $X \subset \mathbb{N}$, quindi per la proprietà archimedea dei numeri reali $X \neq \varnothing$ infatti $\exists k \in \mathbb{N} : k > na$. Per le proprietà di buon ordinamento dei numeri naturali X ammette minimo ovvero $\exists m \in X : m \leq k \forall k \in X$, quindi:

$$na < m$$
$na > m - 1$ (infatti $m - 1 \notin X$)

$na + 1 > m$
$\mathbf{na} < \mathbf{m} < na + 1 < \mathbf{nb}$
$na < m < nb$
$a < \frac{m}{n} < b$
$m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}, q = \frac{m}{n}.$

Caso III

a e b sono ambedue negativi: $a < b < 0$

$a < b < 0 \Rightarrow 0 < -b < -a$
$-a, -b > 0 \Rightarrow$ come nel caso appena illustrato $\exists \bar{q} \in \mathbb{Q} : -b < \bar{q} < -a$ moltiplicando per −1 si invertono i segni della disuguaglianza e si ha che $a < -\bar{q} < b$, $\bar{q} \in \mathbb{Q} \Rightarrow -\bar{q} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}, q = -\bar{q}$.

Densità dei numeri irrazionali nell'insieme dei numeri reali

Definito l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dei numeri irrazionali si dimostra che anch'esso è denso in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, allora $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < x < b$. Per la proprietà di compatibilità della relazione d'ordine fissata su $\mathbb{R}$ rispetto all'operazione di somma algebrica se $a < b$ allora $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$
$a - \sqrt{2}$ e $b - \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ quindi per la proprietà di densità dei numeri razionali nell'insieme dei numeri reali $\exists q \in \mathbb{Q} : a - \sqrt{2} < q < b - \sqrt{2}$, aggiungendo $\sqrt{2}$ a tutti i membri della disuguaglianza si ha che $a < q + \sqrt{2} < b$ e che quindi $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x = q + \sqrt{2}$.

Metrica e topologia

I numeri reali formano uno spazio metrico: la distanza tra x e y è definita come il valore assoluto $|x - y|$. Come accennato sopra, $\mathbb{R}$ risulta essere uno spazio metrico completo.

La metrica appena definita induce su $\mathbb{R}$ una struttura di spazio topologico. Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ è aperto se e solo se è unione di intervalli aperti (a, b), dove a e b possono essere anche $-\infty$ o $+\infty$[1].

Lo spazio $\mathbb{R}$ è connesso ma non compatto. Lo spazio è comunque localmente compatto, ed è una varietà differenziale di dimensione 1. Risulta essere omeomorfo a un qualsiasi intervallo aperto (a, b).

Lo spazio $\mathbb{R}$ è contraibile, e quindi semplicemente connesso, con tutti i gruppi di omotopia banali.

Struttura lineare

I numeri reali sono il prototipo di spazio vettoriale reale di dimensione uno: la moltiplicazione per uno scalare non è altro che la moltiplicazione usuale. La struttura lineare è compatibile con la topologia sopra descritta, dunque $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale topologico.

L'insieme $\mathbb{R}$ può anche essere pensato come uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali; in questo caso risulta avere una dimensione infinita (così come il campo dei numeri algebrici).

Inoltre, la moltiplicazione funge anche da prodotto scalare, rendendo $\mathbb{R}$ uno spazio di Hilbert e quindi uno spazio normato, in cui la norma non è altro che la funzione valore assoluto.

Misura

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Misura di Lebesgue****.*

I numeri reali sono dotati di una misura canonica, la misura di Lebesgue. La misura dell'intervallo (a, b) si definisce come $b - a$. Qualsiasi sottoinsieme numerabile (come ad esempio quello dei numeri razionali), ha misura nulla. Esistono anche sottoinsiemi di misura nulla non numerabili, come l'insieme di Cantor.

Ci sono in $\mathbb{R}$ anche insiemi non misurabili, ma la loro costruzione necessita dell'assioma della scelta: un esempio è l'insieme di Vitali.

La misura di Lebesgue è la misura di Haar della struttura di $\mathbb{R}$ come gruppo topologico, normalizzata in modo che l'intervallo [0,1] abbia misura 1.

Algebra

Ogni numero reale non negativo ha la sua radice quadrata in $\mathbb{R}$, i reali negativi no. Questo mostra che l'ordinamento in $\mathbb{R}$ è determinato dalla sua struttura algebrica.

Ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice. Esistono comunque polinomi senza radici reali, e questo fa di $\mathbb{R}$ un campo non algebricamente chiuso.

La chiusura algebrica di $\mathbb{R}$ (ovvero il più piccolo campo algebricamente chiuso che lo contiene) è il campo dei numeri complessi.

Logica

L'assioma di Dedekind si riferisce a sottoinsiemi di reali e quindi è un predicato della logica del secondo ordine. In generale, non è possibile caratterizzare i reali usando solo la logica del primo ordine.

Per il teorema di Löwenheim-Skolem (debole), esiste un insieme denso numerabile di numeri reali che soddisfa gli stessi predicati nella logica del prim'ordine dei numeri reali.

L'insieme dei numeri iperreali è più grande di $\mathbb{R}$ ma soddisfa gli stessi predicati della logica del prim'ordine di $\mathbb{R}$. I campi ordinati che soddisfano gli stessi predicati della logica del prim'ordine di $\mathbb{R}$ sono chiamati modelli non standard di $\mathbb{R}$. Questo è ciò che permette all'analisi non standard di funzionare; dimostrando un predicato del prim'ordine in qualche modello non standard (che può essere più semplice che dimostrarlo in $\mathbb{R}$), se ne deduce che lo stesso predicato è vero anche per $\mathbb{R}$.

Generalizzazioni ed estensioni

I numeri reali possono essere generalizzati ed estesi in numerose direzioni. Forse l'estensione più naturale è quella dei numeri complessi, che formano un campo algebricamente chiuso. Tuttavia, rispetto ai reali, essi perdono la struttura di ordinamento, ciò significa che i numeri complessi non sono un campo ordinato. I

numeri complessi hanno innumereveli applicazioni in fisica: per esempio, in elettrotecnica e in elettronica sono alla base del metodo simbolico che semplifica enormemente lo studio dei circuiti elettrici in regime sinusoidale, così come sono fondamentali in meccanica quantistica, poiché questa teoria è sviluppata in uno spazio di Hilbert a dimensione infinita sul campo dei complessi e, inoltre, l'unità immaginaria compare nell'equazione di Schrödinger.

Il campo dei numeri complessi è l'algebra ottenuta dal campo dei numeri reali mediante la costruzione di Cayley-Dickson. Proseguendo con tale costruzione, si ottengono algebre successive sul campo dei numeri reali, ciascuna di dimensione via via doppia rispetto all'algebra precedente, al prezzo della progressiva perdita di alcune proprietà. Dopo i numeri complessi, si ottengono, in sequenza, i quaternioni, gli ottonioni e i sedenioni. Tutte queste algebre costituiscono la famiglia delle **algebre di Cayley-Dickson**, che è inclusa nell'insieme dei cosiddetti numeri ipercomplessi, il quale, tuttavia, include anche la famiglia delle algebre di Clifford.

Un'altra possibile estensione per i numeri reali è rappresentata dai numeri duali che, sotto alcuni aspetti, mostrano proprietà complementari rispetto a quelle dei numeri complessi e che, a differenza di questi ultimi, sono caratterizzati da un'unità immaginaria nilpotente. Inoltre, a differenza dei numeri complessi, i numeri duali non costituiscono un campo, ma costituiscono semplicemente un'algebra associativa e commutativa dotata di unità, introducendo le operazioni di somma e di prodotto. Anche i numeri duali hanno applicazioni in fisica, come un semplice esempio di superspazio, utilizzato da alcune teorie fisiche, quali la relatività generale e le teorie supersimmetriche, per descrivere la configurazione spaziale.

Ancora un'altra possibile estensione per i numeri reali è rappresentata dai numeri complessi iperbolici, caratterizzati da un'unità immaginaria il cui quadrato è posto uguale a *1*, invece che a *-1*, come accade per gli ordinari numeri complessi. I numeri complessi iperbolici presentano diverse analogie con gli ordinari numeri complessi, tuttavia, a differenza di questi ultimi e come i numeri duali, non costituiscono un campo; essi costituiscono, infatti, solamente un anello. Anche i numeri complessi iperbolici trovano applicazioni in fisica: per esempio, nell'ambito della relatività ristretta, possono essere utilizzati per rappresentare le trasformazioni di Lorentz.

Esempi di campi ordinati che estendono i reali sono i numeri iperreali e i numeri surreali: entrambi contengono numeri infinitesimali e infinitamente grandi, ma non soddisfano l'assioma di Archimede descritto sopra.

Occasionalmente, come scritto sopra, gli elementi formali $+\infty$ e $-\infty$ sono aggiunti ai reali per formare la *retta numerica estesa*, con una naturale topologia compatta. Questo insieme non è un campo ma mantiene molte delle proprietà dei numeri reali.

Le forme hermitiane su uno spazio di Hilbert (per esempio, le matrici quadrate complesse autoaggiunte) generalizzano i reali in molti aspetti: possono essere ordinate (non totalmente), sono complete, i loro autovalori sono reali e formano un'algebra associativa reale. Gli operatori definiti positivi corrispondono ai numeri reali positivi e gli operatori normali corrispondono ai numeri complessi.

Note

1. ^ Dato uno spazio topologico su un insieme X, sia lo stesso X sia l'insieme vuoto $\emptyset$ sono aperti per ogni sua topologia. Poiché si pone per definizione $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, $(-\infty, +\infty)$ è un aperto dello spazio topologico reale indotto dalla metrica euclidea su $\mathbb{R}^1$.

Voci correlate

- Costruzione dei numeri reali

- Ordinamento tra numeri reali
- Operazioni aritmetiche sui numeri reali
- Numero naturale
- Numero intero
- Numero razionale
- Numero irrazionale
- Numero immaginario
- Numero complesso
- Quaternione
- Numero iperreale
- Numero surreale

Altri progetti

- Wikiversità contiene risorse su **numero reale**
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **numero reale (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Real_numbers?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Numero reale*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Numero reale*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 6844 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=6844) · LCCN (EN) sh85093221 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85093221) · GND (DE) 4202628-3 (https://d-nb.info/gnd/4202628-3) · BNF (FR) cb11977586x (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb11977586x) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb11977586x) · J9U (EN, HE) 987007538747105171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007538747105171) · NDL (EN, JA) 00574870 (https://id.ndl.go.jp/auth/ndlna/00574870)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Numero_reale&oldid=130417005"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta l'11 nov 2022 alle 14:28.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Radicale (matematica)

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, la **radice n-esima** o **radicale n-esimo**, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, di un numero reale $a \geq 0$, scritto come $\sqrt[n]{a}$, è un numero reale $b \geq 0$ tale che $b^n = a$. Il numero reale a è detto **radicando**, il numero n è detto **indice** e il numero b è detto **radice** n-esima di a[1].

Una radice con indice 2 è indicata con il nome di **radice quadrata** e una radice con indice 3 con il nome di **radice cubica** o **radice terza**, ma esistono radici con qualsiasi indice[1].

Indice

Le condizioni di esistenza

Operazioni fondamentali

- Prima proprietà fondamentale dei radicali
- Prodotto di radicali
  - Dimostrazione
  - Esempi
- Quoziente di radicali
  - Dimostrazione
  - Esempi
- Potenze di radicali
  - Esempi
- Radice di un radicale
  - Dimostrazione
  - Esempi
- Portar fuori
  - Dimostrazione
  - Esempi
  - Varianti
- Portar dentro
  - Dimostrazione
  - Esempi
  - Varianti
- Potenze ad esponente razionale
- Radicali quadratici doppi

Somme di radicali

- Dimostrazione
- Generalizzazione
- Casi in cui la somma è possibile

Proprietà invariantiva dei radicali

- Dimostrazione

Esempi
Casi particolari
Razionalizzazione
Radicali letterali
Note
Bibliografia
Voci correlate
Collegamenti esterni

Le condizioni di esistenza

Le condizioni di esistenza sono quell'insieme dei valori delle variabili contenute nel radicale per i quali esso esiste nel campo dei numeri reali[2].

La funzione radice n-esima è una funzione definita da $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, perciò $\sqrt[n]{a}$ resta definita $\iff a \geq 0$

Per esempio, i seguenti radicali esprimono numeri reali:

$$\sqrt{9} = 3; \quad -\sqrt{25} = -5; \quad \sqrt[3]{8} = 2; \quad -\sqrt[3]{27} = -3; \quad \sqrt{2} = 1,4142\ldots, \quad -\sqrt{\pi} = -1,7724\ldots$$

Si può ottenere un risultato analogo alla radice ennesima attraverso l'elevamento a potenza con esponente frazionario:

$$a^{\frac{1}{n}} = b \iff \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = b^n$$

Tuttavia la funzione potenza è definita da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, perciò essa permette di definire due sottocasi:

- se $a \geq 0 \implies a^{\frac{1}{n}} \equiv \sqrt[n]{a}$
- se $a < 0 \implies \exists\, a^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R} \iff n$ è dispari

Ciò implica che equazioni del tipo $x^n + a = 0$, con n pari e $a > 0$ non hanno soluzioni reali, esse infatti appartengono all'insieme dei numeri immaginari, sottoinsieme dell'insieme dei numeri complessi, indicato con $\mathbb{C}$, che vengono espressi come somma di un numero reale e un numero immaginario.

Ad esempio, l'equazione $x^2 + 4 = 0$ avrà per soluzioni $2i$ e $-2i$, dove i rappresenta l'**unità immaginaria**.

Quanto visto finora ci permette d'individuare che, ad esempio, la condizione di esistenza del radicale $\sqrt{x}$ è $C.E.: x \geq 0$, dato che il radicando deve essere sempre positivo.

Ecco altri esempi di condizioni di esistenza:

- $\sqrt[3]{x-1}$ ha come condizioni di esistenza $x \geq 1$: infatti, si deve risolvere la disequazione $x - 1 \geq 0$, la cui soluzione è proprio $x \geq 1$.
- $(x-1)^{\frac{1}{3}}$, invece, esiste $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ ha come condizioni di esistenza $x \leq -1 \ \vee \ x > 2$, poiché è necessario risolvere la disequazione fratta $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$.

- Un ultimo esempio: per trovare le condizioni di esistenza del radicale $\sqrt{\frac{x^2(x+1)^2}{x+2}}$ è necessario risolvere la disequazione $\frac{x^2(x+1)^2}{x+2} \geq 0$, che ha come soluzione $x > -2$, ricordando che i fattori x ed $x+1$ sono sempre positivi o nulli, in quanto quadrati.

Operazioni fondamentali

Esistono delle proprietà fondamentali delle radici che vengono elencate di seguito:

Prima proprietà fondamentale dei radicali

Dalla definizione di radicale segue che:

$(\sqrt[n]{a})^n = a$, con $a \geq 0$ se n pari, $a \in \mathbb{R}$ se n dispari, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Prodotto di radicali

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, con $a \geq 0, b \geq 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Dimostrazione

Si elevino all'ennesima potenza entrambi i membri dell'uguaglianza:

$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$ (per la prima proprietà fondamentale dei radicali)

$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$ (per la prima proprietà fondamentale dei radicali)

Poiché le n-esime potenze dei due membri sono uguali ($ab = ab$), sono uguali anche le basi.

Esempi

Applicando la proprietà:

$$\sqrt{5}\sqrt{10}\sqrt{40} = \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 40} = \sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$$

Allo stesso modo, con $C.E.: \ x > 1$:

$$\sqrt{x-1}\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x-1}} = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-1}} = \sqrt{x}$$

Quoziente di radicali

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ con } a \geq 0, b > 0, n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Dimostrazione

Si elevino all'ennesima potenza entrambi i membri dell'uguaglianza:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b} \text{ (per la prima proprietà fondamentale dei radicali)}$$

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b} \text{ (per la prima proprietà fondamentale dei radicali)}$$

Poiché le n-esime potenze dei due membri sono uguali $\left(\frac{a}{b} = \frac{a}{b}\right)$, sono uguali anche le basi.

Esempi

Applicando la proprietà:

$$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{50}{25}} = \sqrt{2}$$

Allo stesso modo, con $C.E: \ x > -2$:

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{(x+2)(x+3)}} = \sqrt{\frac{x+2}{(x+2)(x+3)}} = \sqrt{\frac{1}{x+3}}$$

Potenze di radicali

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \text{ con } a \geq 0, n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Non è necessario dimostrare questa proprietà in quanto è una diretta conseguenza della seconda proprietà dei radicali con il radicando sempre positivo.

Esempi

Applicando la proprietà:

$$\left(\sqrt{5}\right)^4 = \sqrt{5^4} = 25$$

Allo stesso modo, con $C.E: \ x \geq -1$

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^4 = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$$

Radice di un radicale

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, con $a \geq 0$, $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Dimostrazione

Si elevino all'nm-esima potenza entrambi i membri dell'uguaglianza:

$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right)^m = (\sqrt[m]{a})^m = a$ (per la prima proprietà fondamentale dei radicali)

$(\sqrt[mn]{a})^{mn} = a$ (per la prima proprietà fondamentale dei radicali)

Poiché le nm-esime potenze dei due membri sono uguali ($a = a$), sono uguali anche le basi.

Esempi

Applicando la proprietà:

$$\sqrt{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[2 \cdot 3]{3} = \sqrt[6]{3}$$

Allo stesso modo, con $C.E: x \geq 0, n \neq 0 \ \wedge \ n \neq 1$

$$\sqrt[n]{\sqrt[n-1]{x}} = \sqrt[n(n-1)]{x} = \sqrt[n^2-n]{x}$$

Portar fuori

$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$, con $a \geq 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

Dimostrazione

Per il teorema del prodotto si ottiene:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b}$$

Ma, per la seconda proprietà fondamentale dei radicale è $\sqrt[n]{a^n} = a$, perciò:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$$

Esempi

Applicando la proprietà:

$$\sqrt{500} = \sqrt{100 \cdot 5} = 10\sqrt{5}$$

Allo stesso modo, con $C.E: \ x \geq 0$:

$$\sqrt{x(x+1)^2} = (x+1)\sqrt{x}$$

Varianti

Il teorema presenta le seguenti varianti, facilmente verificabili:

$\sqrt[n]{a^{nx}b} = a^x\sqrt[n]{b}$, con $a \geq 0, b > 0, n, x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\sqrt[n]{a^{nx+k}} = a^x\sqrt[n]{a^k}$, con $a \geq 0, n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Portar dentro

$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$, con $a \geq 0, b > 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Dimostrazione

Elevando tutto alla n-esima potenza si ottiene:

$$a\sqrt[n]{b} = a^n b$$

Radicando ora il tutto sotto radice di indice n risulta:

$$a^n b = \sqrt[n]{a^n b}$$

Quindi:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

Esempi

Applicando la proprietà:

$$10\sqrt{3} = \sqrt{10^2 \cdot 3} = \sqrt{300}$$

Allo stesso modo:

$x\sqrt{3} = \sqrt{3x^2}$ per $x \geq 0$

$-\sqrt{3x^2}$ per $x < 0$

Varianti

Il teorema presenta le seguenti varianti, facilmente verificabili:

$a^x\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{nx}b}$, con $a \geq 0, b > 0, n, x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$a^x \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^{nx+k}}, \text{ con } a \geq 0, n, x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Potenze ad esponente razionale

Tenendo conto di quanto detto finora, si ha che per $a \geq 0$

- $a^{\frac{m}{n}} \equiv \sqrt[n]{a^m}$
- $a^{-\frac{m}{n}} \equiv \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Il primo enunciato si ottiene direttamente dalla definizione di radicale, il secondo applicando il teorema delle potenze ad esponente negativo.

Radicali quadratici doppi

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

dove $a > 0, b > 0$e $a^2 > b$.

Per ogni numero complesso $a \neq 0$, ci sono n diversi numeri complessi b tali che $b^n = a$, quindi il simbolo $\sqrt[n]{a}$ non può essere usato univocamente. Se $a = 1$, parliamo di radici n-esime dell'unità.

Somme di radicali

È importante ricordare che, in generale, è sempre (per $a \geq 0, b \geq 0$):

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + b}$$

tenendo presente che l'uguaglianza si ha se e solo se almeno uno tra a e b è 0.

Quindi, affermare che $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ sarebbe un gravissimo errore.

Dimostrazione

Partendo dalla disequazione:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + b}$$

Elevando al quadrato si ottiene:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a + b}\right)^2$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} \geq a + b$$

$$2\sqrt{ab} \geq 0$$

Poiché è $a \geq 0$ e $b \geq 0$ per ipotesi, è anche $\sqrt{ab} \geq 0$, quindi la tesi è vera.

Generalizzazione

Il teorema è facilmente estendibile alle radici di indice n-esimo:

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \geq \sqrt[n]{a+b}, \text{ con } a \geq 0, b \geq 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Casi in cui la somma è possibile

La somma di radicali è possibile solo se sono presenti radicali simili, cioè nel caso in cui:

$$a\sqrt[n]{k} + b\sqrt[n]{k} = (a+b)\sqrt[n]{k}, \text{ con } k > 0$$

Ad esempio:

$$10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (10+5)\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$$

$$5 + 3\sqrt{5} = \sqrt{5}\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = \left(\sqrt{5}+3\right)\sqrt{5}$$

Nel secondo esempio si tenga presente che vale $n = \sqrt{n}\sqrt{n}$.

Proprietà invariantiva dei radicali

La proprietà invariantiva dei radicali afferma che:

"Moltiplicando o dividendo sia l'indice di un radicale che l'esponente del suo radicando per un numero naturale diverso da 0, si ottiene un radicale equivalente a quello dato."

In simboli:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}, \text{ con } x \geq 0, n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Dimostrazione

Si elevi alla np potenza ciascuno dei due membri:

$$(\sqrt[n]{x})^{np} = ((\sqrt[n]{x})^n)^p = x^p \text{ (per la prima proprietà fondamentale dei radicali)}$$

$$\left(\sqrt[np]{x^p}\right)^{np} = x^p \text{ (per la prima proprietà fondamentale dei radicali)}$$

Si ottiene $x^p = x^p$, e, poiché le np-esime potenze dei due membri sono uguali, sono uguali anche le basi.

Esempi

Utilizzando la proprietà invariantiva è possibile semplificare i radicali, dividendo sia indice che esponente del radicando per uno stesso numero:

$$\sqrt[10]{3^5} = \sqrt[\frac{10}{5}]{3^{\frac{5}{5}}} = \sqrt{3}$$

Allo stesso modo:

$$\sqrt[20]{(x+1)^{10}} = \sqrt{|x+1|}$$

Si noti che nell'espressione è stato inserito il valore assoluto: questo perché, mentre il primo radicale $\sqrt[20]{(x+1)^{10}}$ esiste sempre, dato che ha il radicando elevato ad un indice pari, successivamente viene semplificato ed il suo radicando non è più elevato ad un esponente pari. Quindi è necessario inserire il valore assoluto, per fare in modo che l'uguaglianza si mantenga valida.

Casi particolari

La radice n-esima di 0 vale sempre 0, escludendo il caso in cui è $n = 0$, poiché la radice di indice 0 ha significato solo se il radicando è uguale ad 1, ossia nel caso:

$\sqrt[0]{1} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, poiché l'operazione inversa, n^0, con $n \neq 0$, dà sempre come risultato il valore 1, quindi qualsiasi valore, anche complesso, di n è accettabile.

Inoltre, è sempre:

$$\sqrt[n]{1} = 1$$

$$\sqrt[1]{n} = n$$

Razionalizzazione

Nelle elaborazioni di espressioni e formule algebriche, è spesso utile manipolare i radicali usando le relazioni scritte sopra, senza tentare di calcolare il valore di ogni singolo elemento. Ad esempio, se a e b sono due numeri positivi distinti:

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) &= \sqrt{a}\sqrt{a} - \sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}\sqrt{a} - \sqrt{b}\sqrt{b} \\ &= a - b\end{aligned}$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-1} = \frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

L'ultima relazione può servire per razionalizzare il denominatore di un'espressione o di un'equazione.

Radicali letterali

Può capitare, spesso in analisi, di trovare radicali letterali, ossia radici quadrate con radicando letterale. In questo caso, dapprima bisogna trovare la condizione di esistenza (chiamata anche C.A. *Condizione di accettabilità*, o C.R.R. *Condizione di Realtà del Radicando*), nel caso si lavori solo tra i numeri reali, per poi considerare sempre quando le lettere indicano numeri positivi o numeri negativi.

Un esempio di radicale letterale:

$$\sqrt[n]{\frac{x+3}{x^3-1}}$$

Le condizioni di esistenza si ricavano nel seguente modo:

- Per l'**indice**, è semplicemente $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, poiché è l'unico numero naturale per cui perde di significato;
- Se l'indice è pari, per il **radicando** è necessario risolvere la disequazione frazionaria $\frac{x+3}{x^3-1} \geq 0$, la cui soluzione è: $x > 1 \ \vee \ x \leq -3$.
- Se l'indice è dispari, per il **radicando** basta imporre le condizioni di esistenza sul denominatore, ossia $x^3 - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$.

Pertanto il campo di esistenza del radicale è: $C.E: \ \ (x > 1 \ \vee \ x \leq -3) \ \wedge \ (n \neq 0)$.

Note

1. Carboncini *et al.*, pp. 15-16.
2. ^ Carboncini *et al.*, pp. 17-18.

Bibliografia

Andrea Minini, *I radicali spiegati in modo semplice*, su *Il non-senso della vita 3.0*. URL consultato il 20 febbraio 2023.

Voci correlate

- Radice quadrata
- Costante deliana
- Radice (simbolo)

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Radicale*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Radicale*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 38000 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=38000) · GND (DE) 4258245-3 (https://d-nb.info/gnd/4258245-3)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Radicale_(matematica)&oldid=133698675"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 27 mag 2023 alle 18:33.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Equazione di secondo grado

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, un'**equazione di secondo grado** o **quadratica** ad un'incognita x è un'equazione algebrica in cui il grado massimo con cui compare l'incognita è 2, ed è sempre riconducibile alla forma:[1]

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\text{con } a \neq 0),$$

dove a, b, c sono numeri reali o complessi.

Per il teorema fondamentale dell'algebra, le soluzioni (dette anche radici o zeri dell'equazione) delle equazioni di secondo grado nel campo complesso sono sempre due, se contate con la loro molteplicità. Nel campo reale invece le equazioni quadratiche possono ammettere due soluzioni, una soluzione doppia, oppure nessuna soluzione.[2]

Sono poi particolarmente semplici da risolvere le cosiddette equazioni *incomplete*, dove alcuni coefficienti sono uguali a zero.

Il grafico della funzione

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

nel piano cartesiano è una parabola, la cui concavità dipende dal segno di a. Più precisamente: se $a > 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto, se $a < 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il basso.[3]

Indice

Storia

Equazioni quadratiche incomplete

- Equazione spuria
- Equazione pura
- Equazione monomia

Equazioni complete e formula risolutiva generale

Calcolo delle soluzioni

Interpretazione geometrica

Forma ridotta della formula risolutiva

Relazioni tra radici e coefficienti

Scomposizione in fattori del trinomio

Regola dei segni

Esempio di risoluzione tramite completamento del quadrato

Metodo del resto

Casi particolari

Formula alternativa

Note

Bibliografia

Voci correlate

Altri progetti
Collegamenti esterni

Storia

Gli antichi babilonesi lasciarono nelle tavolette di argilla le prime testimonianze della scoperta delle equazioni quadratiche e trovarono le prime tecniche per risolverle. In Mesopotamia spesso le equazioni erano introdotte da problemi di tipo geometrico: ad esempio si chiede di trovare il lato di un quadrato sapendo che l'area meno un lato è uguale a 870; problema che corrisponde alla nostra equazione $x^2 - x = 870$ (ridotta in forma normale come $x^2 - x - 870 = 0$). I Babilonesi non accettavano però le soluzioni negative e nulle delle equazioni e, non accettando il fatto che i coefficienti potessero assumere valori sia positivi che negativi, non veniva riconosciuta nemmeno una forma normale unica, ma erano distinti tre casi con coefficienti positivi:[4]

- $x^2 + bx = c$
- $x^2 + c = bx$
- $x^2 = bx + c$

Espresse nella forma moderna la prima ha il termine noto negativo, la seconda il coefficiente di primo grado negativo, e la terza entrambi i coefficienti minori di zero. L'equazione con tutti i termini positivi non era nemmeno presa in considerazione in quanto ammette solo soluzioni negative.

Nella forma normale babilonese il coefficiente di secondo grado è unitario ma non arrivavano a tale forma, come successivamente gli arabi dividendo tutti i membri per a. Data, per esempio, l'equazione $ax^2 + bx = c$, entrambi i membri venivano infatti moltiplicati per a: $a^2x^2 + bax = ac$ e poi veniva effettuata la sostituzione $y = ax$ in modo da ottenere un'equazione in forma normale nella variabile y; $y^2 + by = ac$. Questo procedimento testimonia l'elevato grado di flessibilità raggiunto dall'algebra babilonese.[5]

La soluzione era data tramite formule che ricordano molto quelle odierne. Per esempio la formula risolutiva per il primo caso era, espressa in notazione moderna, la seguente:

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2},$$

che può essere ridotta tramite semplici passaggi algebrici alla formula risolutiva moderna per questo caso:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

Il matematico indiano Baudhāyana, che scrisse un Shulba Sutras nell'antica India all'incirca nell'VIII secolo a.C., usò per primo equazioni quadratiche della forma $ax^2 = c$ e $ax^2 + bx = c$, indicando i metodi per risolverle.

I matematici babilonesi (intorno al 400 a.C.) e cinesi utilizzarono il metodo del completamento del quadrato per risolvere varie equazioni quadratiche con radici positive, ma non ottennero una formula generale.

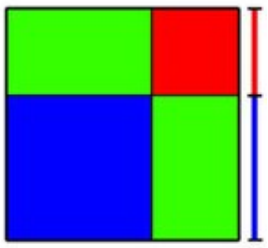
Euclide descrisse un metodo geometrico più astratto intorno al 300 a.C.; Diofanto di Alessandria si occupò della soluzione delle equazioni di secondo grado, tuttavia il suo lavoro non ebbe conseguenze significative poiché la matematica greca era in una fase di declino. Il *manoscritto di Bakhshali*, scritto in India fra il 200 a.C. e il 400 d.C., introdusse la formula risolutiva delle equazioni quadratiche.

Il primo matematico noto ad aver usato la formula algebrica generale, consentendo sia le soluzioni positive che quelle negative, fu Brahmagupta (India, VII secolo).

Al-Khwarizmi (BagdĀd, IX secolo d.C) sviluppò indipendentemente un insieme di formule che funzionava per le soluzioni positive. Nell'*al-Jabr*, al-Khwarizmi distingue 5 tipi di equazione: i tre già noti ai babilonesi e in più l'equazione pura $x^2 = c$ e quella spuria $x^2 = bx$. Anche qui si pone il coefficiente di secondo grado uguale a 1, ma ci

si arriva tramite divisione. Le soluzioni negative non sono, nemmeno stavolta, accettate.

Il metodo usato da al-Khwarizmi è quello del *completamento del quadrato*. L'equazione $x^2 + 8x = 33$, per esempio, sarebbe stata risolta aggiungendo 16 a entrambi i termini in modo da "completare" il quadrato al primo membro: $x^2 + 8x + 16 = 49$ ossia $(x + 4)^2 = 49$. Da questa si otteneva $x + 4 = 7$ e si trovava così la soluzione positiva $x = 3$.



Il matematico arabo proponeva anche una trasposizione grafica. Supponiamo di dover risolvere la stessa equazione $x^2 + 8x = 33$. Il metodo usato dal persiano in questo caso avrebbe potuto essere *simile* al seguente: si tracci un quadrato che supponiamo avere lato x (quello blu in figura). Vi si affianchino due rettangoli di dimensioni x e 4 ossia $\frac{b}{2}$ (quelli verdi in figura). L'area della figura verde e blu è $x^2 + 8x$. Poniamo ora che quest'area sia uguale a 33. Aggiungiamo ora il quadratino rosso di lato 4, in modo da "completare" il quadrato grande. L'area totale sarà quindi $33 + 16 = 49$ e il lato del quadrato grande è dunque 7. Poiché il lato grande è dato dal lato del quadrato blu (cioè x) sommato al lato del rettangolo verde (cioè 4); $x = 7 - 4 = 3$.[6] Al-Khwaritzmi pone per la prima volta l'accento sul segno del discriminante, che deve essere positivo perché l'equazione sia risolubile.

La priorità della scoperta della formula generale per risolvere un'equazione quadratica è stata attribuita a Sridhara (870-930 circa), sebbene ai suoi tempi vi sia stata una disputa. La regola (come riportata da Bhaskara II) è:

> «Moltiplica entrambi i membri dell'equazione per una quantità nota uguale a quattro volte il coefficiente del quadrato dell'incognita; aggiungi a entrambi i membri una quantità nota uguale al quadrato del coefficiente dell'incognita; quindi determina la radice quadrata.[7]»

Abraham bar Hiyya Ha-Nasi (conosciuto anche con il nome latino Savasorda) fu il primo a introdurre in Europa la soluzione completa con il suo *Liber embadorum*. Nell'epoca moderna in Europa si iniziò ad accettare le soluzioni negative e, successivamente, quelle complesse e a porre l'equazione in un'unica forma normale.

Viète introdusse per primo delle lettere per esprimere i coefficienti delle equazioni, ipotizzando per primo che potessero assumere anche valori negativi. Scoprì poi le formule che portano il suo nome e che mettono in relazione i coefficienti dell'equazione con le radici. In particolare per l'equazione di secondo grado si afferma che se il coefficiente di secondo grado a è 1, allora il prodotto delle radici dà il termine noto e l'opposto della loro somma il coefficiente di primo grado.

Cartesio introdusse nel XVII secolo la regola dei segni, secondo la quale un'equazione di secondo grado ha tante soluzioni positive quanti sono i cambi di segno fra due coefficienti consecutivi. L'equazione $x^2 + 8x - 33 = 0$, ad esempio, presentando una permanenza di segno (tra il primo ed il secondo coefficiente) ed una variazione di segno (tra il secondo ed il terzo coefficiente) ammette una soluzione negativa ed una positiva, invece l'equazione $x^2 - 8x + 33 = 0$, presentando due cambi di segno tra i coefficienti consecutivi, ammette due radici positive.

Equazioni quadratiche incomplete

Equazione spuria

Si dice *spuria* un'equazione quadratica che manca del termine noto, ossia avente la forma:[8]

$$ax^2 + bx = 0.$$

Un'equazione di questo tipo si risolve facilmente tramite il raccoglimento a fattor comune:

$$x(ax + b) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto quest'equazione è equivalente alle due:

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad ax_2 + b = 0.$$

e in definitiva le sue soluzioni sono:

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Se i coefficienti dell'equazione spuria sono numeri reali, è caratteristica di questa equazione l'avere sempre due soluzioni reali distinte di cui una nulla.

Equazione pura

Si dice *equazione quadratica pura* un'equazione polinomiale di secondo grado mancante del termine di primo grado:[9]

$$ax^2 + c = 0.$$

Portando c al secondo membro e dividendo per a si ottiene:

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Se $-\frac{c}{a} < 0$, l'equazione non ammette soluzioni nel campo reale, in quanto non esistono numeri reali che siano radici quadrate di un numero negativo (per esempio $\sqrt{-4}$), bensì esistono due soluzioni nel campo dei numeri complessi.

Se $-\frac{c}{a} > 0$, l'equazione è risolta da:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Se i coefficienti dell'equazione pura sono numeri reali, le soluzioni saranno sempre o due numeri reali opposti oppure due numeri complessi coniugati.

Equazione monomia

Si dice *equazione monomia* un'equazione quadratica nella quale $b = 0$ e $c = 0$, dunque nella forma $ax^2 = 0$. In questo caso l'equazione ammette come unica soluzione doppia, o di molteplicità due, $x_1 = x_2 = 0$.[8]

Equazioni complete e formula risolutiva generale

Un'equazione polinomiale di secondo grado viene detta "equazione quadratica completa" quando tutti i suoi coefficienti sono diversi da 0. Essa viene risolta con il cosiddetto metodo del completamento del quadrato, così chiamato perché si modifica l'equazione fino a ottenere al suo primo membro il quadrato di un binomio nella forma:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Anzitutto si porti c al secondo membro:

$$ax^2 + bx = -c.$$

Moltiplicando per $4a$ entrambi i membri, si ottiene:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac.$$

Si noti che:

$$4a^2x^2 = (2ax)^2$$

e che:

$$4abx = 2 \cdot (2ax) \cdot b,$$

dunque è possibile considerare il termine $2ax$ come la A della formula del quadrato di binomio e $4abx$ come il doppio prodotto $2AB$ dove la B è uguale a b; dunque, per fare in modo che al primo membro si abbia un quadrato di binomio, si somma ad ambo i membri dell'equazione b^2:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac,$$

ovvero:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Il secondo membro di quest'equazione è detto discriminante e in genere viene indicato con la lettera greca delta maiuscola Δ. Se $b^2 - 4ac$ è negativo non ci sono soluzioni reali dal momento che il primo membro, essendo un quadrato, è sempre maggiore o uguale a 0. In caso contrario, si può scrivere:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

che, con semplici passaggi, può essere riscritto come:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Quest'ultima espressione è nota come "formula risolutiva delle equazioni di secondo grado".

Calcolo delle soluzioni

Alla luce della dimostrazione precedente è chiaro che, nella risoluzione di un'equazione quadratica, è anzitutto necessario calcolare il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si distinguono tre casi:[10]

- Se $\Delta > 0$, vi sono due soluzioni reali e distinte:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Se $\Delta = 0$, la formula risolutiva diventa:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm 0}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

  Pertanto $x_1 = x_2$, e vi è una sola radice di molteplicità due.
- Se $\Delta < 0$, infine, l'equazione non ha soluzioni reali. In particolare le soluzioni sono sempre due, ma appartengono al campo dei numeri complessi: esse sono due numeri complessi coniugati e si calcolano tramite le due formule:

$$x_+ = \frac{-b}{2a} + i\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)$$
$$x_- = \frac{-b}{2a} - i\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right),$$

dove i è l'unità immaginaria ($i^2 = -1$).

Interpretazione geometrica

Le radici dell'equazione quadratica

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

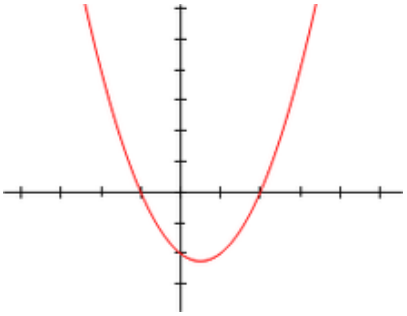
sono anche i punti in cui la funzione

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

assume valore nullo, dal momento che essi sono i valori di x per cui:

$$f(x) = 0.$$

Se a, b e c sono numeri reali e il dominio di f è l'insieme dei numeri reali, allora gli zeri di f sono esattamente le ascisse dei punti dove il grafico di f tocca l'asse x.



Per la funzione quadratica: $f(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, di una variabile reale x, le ascisse dei punti dove il grafico tocca l'asse X, $x = -1$ e $x = 2$, sono le radici dell'equazione quadratica: $x^2 - x - 2 = 0$.

Dalle considerazioni precedenti si deduce che:[11]

- se il discriminante è positivo, il grafico interseca l'asse delle ascisse in due punti;
- se è nullo, il grafico è tangente all'asse x, ovvero lo interseca nel vertice della parabola;
- se è negativo, il grafico non tocca mai l'asse x.

Forma ridotta della formula risolutiva

La formula risolutiva dell'equazione di secondo grado può essere "semplificata" moltiplicando per $\frac{1}{2}$ il denominatore e il numeratore:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a},$$

e, applicando la sostituzione $t = \frac{b}{2}$, si ottiene:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - ac}}{a}.$$

Questa formula può risultare comoda quando il coefficiente dell'incognita di primo grado dell'equazione, b, è esattamente divisibile per due, e viene chiamata *formula ridotta*.[12]

Nel caso in cui $a = 1$, allora la formula si semplifica in:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Relazioni tra radici e coefficienti

Si ponga s uguale alla somma delle due soluzioni dell'equazione quadratica e p il loro prodotto, quindi $s = x_1 + x_2$ e $p = x_1 x_2$. Sommando membro a membro le due soluzioni si ha:

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Effettuando invece il prodotto membro a membro si ottiene:

$$p = x_1 x_2 = \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Queste due relazioni consentono di determinare somma e prodotto delle radici senza risolvere l'equazione[13]; esse sono un caso particolare delle formule di Viète. Inoltre, se si riscrive la generica equazione di secondo grado nella cosiddetta *forma normale*, cioè dividendo ambo i termini per a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

con banali sostituzioni si ottiene la forma:

$$x^2 - sx + p = 0$$

Meno usata ma altrettanto importante è la relazione:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|},$$

dimostrabile attraverso semplici passaggi algebrici.

Scomposizione in fattori del trinomio

Si consideri il polinomio completo di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c,$$

e si supponga anche che il discriminante dell'equazione che si ottiene uguagliando a zero il polinomio sia positivo (ipotesi non necessaria nel campo dei numeri complessi). Raccogliendo a si ottiene:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Si è già trovato prima che $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Dunque:

$$\begin{aligned} a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\right) &= a\left(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2\right) \\ &= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

Pertanto è possibile scomporre un polinomio di secondo grado in due binomi di primo grado, calcolando le soluzioni dell'equazione data dal polinomio eguagliato a zero:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Se il $\Delta = 0$ l'equazione associata ha una sola soluzione reale di molteplicità due, la scomposizione del trinomio di secondo grado può essere così riscritta:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Regola dei segni

Lo stesso argomento in dettaglio: ***Regola dei segni di Cartesio***.

La *regola dei segni* o *regola di Cartesio* consente di determinare il segno delle radici di un'equazione completa con discriminante non negativo. Si considerino, nell'ordine, i segni di a, b e c. È possibile assumere che sia $a > 0$, a meno di moltiplicare entrambi i termini per -1. Ci sono 4 possibili combinazioni:[14]

a	b	c
+	+	+
+	+	-
+	-	+
+	-	-

1. Primo caso: $a, b, c > 0$. Ricordando che $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, segue che il loro prodotto è positivo e la loro somma negativa, per cui entrambe le soluzioni sono negative.
2. Secondo caso: $a, b > 0$ e $c < 0$. Allora il prodotto delle radici è negativo (che implica che sono discordi) e la somma è negativa (che implica che la soluzione negativa è in valore assoluto maggiore di quella positiva).
3. Terzo caso: $a, c > 0$ e $b < 0$. Allora il prodotto delle radici è positivo come pure la loro somma; pertanto entrambe le radici sono positive.
4. Quarto caso: $a > 0$ e $b, c < 0$. Allora il prodotto delle radici è negativo (che implica di nuovo che sono discordi), ma la somma è positiva (dunque la soluzione positiva è maggiore in valore assoluto).

Chiamando *permanenza* ogni successione di due segni uguali e *variazione* ogni successione di segni contrari, è possibile riassumere i risultati precedenti affermando che a ogni permanenza corrisponde una soluzione negativa, e a ogni variazione una soluzione positiva. Quando le radici sono discordi, in valore assoluto è maggiore quella positiva se la variazione precede la permanenza; quella negativa se la permanenza precede la variazione.

Esempio di risoluzione tramite completamento del quadrato

Sia:

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 = 0$$

allora:

$$(x^2 + 3x + \tfrac{9}{4}) - \tfrac{9}{4} + 2 = 0$$

$$(x + \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{9}{4} + 2 = 0$$

$$(x + \tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{1}{4}$$

da cui:

1. $x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \iff x_1 = -1$
2. $x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \iff x_2 = -2$

A questo punto è possibile disegnare il grafico di $f(x)$, traslando la parabola associata a $y = x^2$ di $-\frac{3}{2}$ lungo l'asse x, e di $-\frac{1}{4}$ lungo l'asse y.

Metodo del resto

Ad alcune equazioni possono essere applicati metodi diversi per trovarne le radici. Si usa il teorema del resto di Ruffini, si controllano i divisori possibili del termine noto c e si prendono una volta $+$ e una volta $-$; considerando poi la formula del teorema del resto di Ruffini $(x - y)$, è possibile subito sapere che $x = y$, e che sostituendo la y nell'equazione al posto della x si può verificare il resto che ci darà il polinomio diviso con $(x - y)$: se è 0 allora $(x - y)$ sarà il divisore, dove una soluzione dell'equazione è y. A questo punto si può trovare l'altra soluzione in due modi:

- ***Ruffini***:

Applicando la divisione di Ruffini, o il metodo Canonico, per avere un binomio in cui, dopo eventuale raccoglimento del coefficiente a, il termine noto, cambiato di segno, sarà la seconda soluzione cercata:

$$(ax^2 + bx + c) : (x - y) = a \cdot (x - z) \Longrightarrow x = z.$$

Quindi: $x_1 = y; x_2 = z.$

- ***Metodo delle radici***:

Sapendo che:

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2.$$

e che:

$$\frac{c}{a} = x_1 x_2.,$$

avendo trovato la prima soluzione col metodo visto sopra, la seconda soluzione può essere trovata in modo più breve senza applicare la divisione ponendo:

$$x_2 = \frac{c}{a x_1},$$

$$x_2 = -\frac{b}{a} - x_1.$$

Vale anche viceversa.

Casi particolari

Due casi particolari sono $a + c = -b$ oppure $a + c = b$. Nel primo caso le soluzioni sono $x_1 = +1$ e $x_2 = \frac{c}{a}$, mentre nel secondo caso le soluzioni sono $x_1 = -1$ e $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Formula alternativa

In certe situazioni è preferibile esprimere le radici in una forma alternativa:

$$x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Tuttavia, questa formula è corretta solo con la condizione aggiuntiva che c non sia nullo. Se $c = 0$, questa formula fornisce correttamente la soluzione $x = 0$, ma non consente di ottenere la radice diversa da zero (dal momento che si otterrebbe la divisione $0/0$, che non è definita).

Naturalmente, i valori delle due radici risultano uguali indipendentemente che si usi la formula "classica" o quella alternativa, che è in effetti una semplice variante algebrica della prima:

$$\begin{aligned}\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} \\ &= \frac{4ac}{2a\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} \\ &= \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.\end{aligned}$$

Un'attenta implementazione su un calcolatore dotato di operazioni in virgola mobile differisce da entrambe le formule per garantire la robustezza del risultato. Assumendo che il discriminante sia positivo e $b \neq 0$, si può usare un codice come il seguente:

$$\begin{aligned}t &= -\frac{\left(b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2} \\ r_1 &:= \frac{t}{a} \\ r_2 &:= \frac{c}{t}\end{aligned}$$

dove $\operatorname{sgn}(b)$ denota la funzione segno, che vale $+1$ se b è positivo e -1 se b è negativo; questo accorgimento assicura di sommare due quantità dello stesso segno, evitando l'eventuale perdita di precisione. Il calcolo della seconda radice r_2 sfrutta il fatto che il prodotto delle radici è uguale a $\frac{c}{a}$.

Note

1. ^ Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, *Matematica.Blu-Volume 2*, Zanichelli, 2010, ISBN 978-88-08-31344-7. p.865
2. ^ Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, *Matematica.Blu-Volume 2*, Zanichelli, 2010, ISBN 978-88-08-31344-7. p.868
3. ^ Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 3*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0431-0. p.423
4. ^ Boyer 1991 p. 38
5. ^ Boyer 1991 pp. 39-40
6. ^ Boyer 1991 p. 270
7. ^ Biografia di Sridhara (http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Sridhara.html) Archiviato (https://web.archive.org/web/20160305013135/http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Sridhara.html) il 5 marzo 2016 in Internet Archive.
8. Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, *Matematica.Blu-Volume 2*, Zanichelli, 2010, ISBN 978-88-08-31344-7. p.870
9. ^ Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, *Matematica.Blu-Volume 2*, Zanichelli, 2010, ISBN 978-88-08-31344-7. p.869
10. ^ Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. p.64

11. ^ Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. p.79
12. ^ Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. p.65
13. ^ Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, *Matematica.Blu-Volume 2*, Zanichelli, 2010, ISBN 978-88-08-31344-7. p.872
14. ^ Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, *Matematica.Blu-Volume 2*, Zanichelli, 2010, ISBN 978-88-08-31344-7. pp.874-875

Bibliografia

- Carl Benjamin Boyer, *Storia della matematica*, traduzione di Adriano Carugo, Mondadori, 1991, ISBN 88-04-33431-2.
- Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, *Matematica.Blu-Volume 2*, Zanichelli, 2010, ISBN 978-88-08-31344-7.
- Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8.
- Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 3*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0431-0.

Voci correlate

- Equazione
- Equazione lineare
- Equazione cubica
- Equazione quartica
- Radicale (matematica)
- Parabola (geometria)
- Disequazione quadratica
- Sistema di equazioni di secondo grado

Altri progetti

- Wikiversità contiene risorse sulle **equazioni di secondo grado**
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file sulle **equazioni di secondo grado (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Quadratic_equation?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- *equazione quadratica*, in *Enciclopedia della Matematica*, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, 2013.
- (EN) *Equazione di secondo grado*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Equazione di secondo grado*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 32445 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=32445) · LCCN (EN) sh85044517 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85044517) · BNF (FR) cb12124598x (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb12124598x) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb12124598x) · J9U (EN, HE) 987007552898205171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007552898205171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Equazione_di_secondo_grado&oldid=133623445"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 22 mag 2023 alle 11:22.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

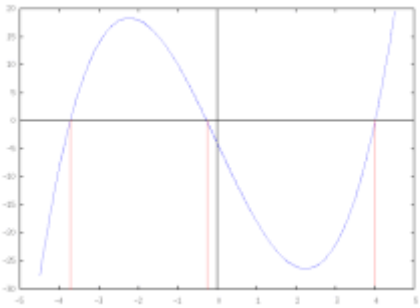
Equazione di terzo grado

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica viene detta **equazione di terzo grado** o **cubica** un'equazione che si presenta o può essere trasformata in forma polinomiale in cui il grado massimo dell'incognita è il terzo. Pertanto, la sua forma canonica è

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad \text{con } a \neq 0.$$

Il primo metodo risolutivo generale per questa classe di equazioni è dovuto a Scipione del Ferro. Tuttavia, alla formula risolutiva vengono normalmente associati i nomi di Gerolamo Cardano e



Il grafico della funzione di terzo grado: $f(x) = x^3 - 15x - 4$. In rosso sono segnati gli zeri della funzione.

Niccolò Fontana detto Tartaglia, che portarono a compimento una serie di miglioramenti del metodo dovuti a vari autori della scuola algebrica italiana.

Indice

Storia

Metodo risolutivo

Problemi relativi alle soluzioni

Dimostrazione

- Trasformazione della formula generale in una formula con soluzioni note
- Utilizzo dei numeri complessi per trovare le soluzioni dell'equazione
  - Caso: $\Delta_{III}<0$
  - Caso: $\Delta_{III}>0$
  - Caso: $\Delta_{III}=0$

Soluzione in forma non depressa

Casi particolari

- Caso 1: $x^3+x=c$
- Caso 2: $d=bc/a$

Note

Bibliografia

Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Storia

Sin dai tempi della matematica babilonese erano noti metodi risolutivi per equazioni di terzo grado particolari, essenzialmente quelle che possono essere ricondotte ad un'equazione di secondo grado. I greci riuscivano a risolvere alcune equazioni di terzo grado con il metodo delle coniche, metodo reso famoso dall'aneddoto della duplicazione dell'altare di Apollo. Durante l'età della matematica persiana, ʿUmar Khayyām credeva che, a parte i casi riducibili, non esistesse un metodo risolutivo generale per le equazioni di terzo grado, opinione che ancora Luca Pacioli riportava nella sua opera del 1494 *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*.

Un primo procedimento risolutivo di buona generalità venne scoperto da Scipione del Ferro; la data esatta di questa scoperta resta ignota, ma egli la comunicò in fin di vita (ca. 1526) ad un suo allievo, Antonio Maria del Fiore, detto *Floridus* in latino.

Niccolò Fontana, detto Tartaglia, già nel 1541 sapeva risolvere problemi implicanti equazioni di terzo grado: quando si diffuse la voce, Floridus e Tartaglia si sfidarono a vicenda, ognuno sottoponendo all'altro trenta "questioni" da risolvere entro una certa data. Quando arrivò il giorno stabilito, Tartaglia aveva risolto tutti i problemi di Floridus e questi nemmeno uno. All'epoca infatti i numeri negativi non venivano usati e si ricorreva a diversi metodi risolutivi con soli numeri positivi: Floridus conosceva solamente un metodo per coefficienti positivi, ossia per equazioni della forma:

$$x^3 + px = q,$$

mentre Tartaglia gli aveva sottoposto tutti problemi con coefficienti negativi, e nella forma:

$$x^3 + px^2 = q,$$

probabilmente riconducendo questo caso al precedente. Era infatti noto che, se il coefficiente di terzo grado è l'unità, allora quello di secondo grado cambiato di segno è la somma delle radici.

Sorse poi nel 1545 un'aspra polemica tra Tartaglia, Gerolamo Cardano e Lodovico Ferrari, cui si deve la soluzione generale dell'equazione di quarto grado, circa la paternità della soluzione. Venuto a sapere della vittoria su Floridus, Cardano aveva invitato Tartaglia a recarsi da lui nella città di Milano, con la vaga promessa di trovargli un mecenate. Tartaglia non aveva fonti di reddito stabili forse a causa della balbuzie, causatagli da una sciabolata ricevuta da ragazzo durante l'assalto di Brescia da parte di truppe francesi nel 1512. Il difetto, a cui si deve anche il soprannome autoimpostosi di Tartaglia, lo rendeva inadatto all'insegnamento, per cui l'offerta venne accettata. Tartaglia dunque rivelò a Cardano il procedimento sotto forma di poesia (tra parentesi la notazione attuale):

TERZA RISPOSTA
DATA DA NICOLO TARTALEA BRESCIANO

Niccolò Tartaglia, *Terza risposta data a messer Hieronimo Cardano et a messer Lodovico Ferraro*, 1547

> «Quando che'l cubo con le cose appresso [$x^3 + px$]
> Se agguaglia à qualche numero discreto [$= q$]
> Trovan dui altri differenti in esso. [$u - v = q$]
>
> Dapoi terrai questo per consueto
> Che'llor produtto sempre sia eguale [$uv =$]
> Al terzo cubo delle cose neto, [$(p/3)^3$]
>
> El residuo poi suo generale
> Delli lor lati cubi ben sottratti [$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$]
> Varra la tua cosa principale. [$= x$]»
>
> (Umberto Bottazzini, *La "grande arte": l'algebra nel Rinascimento*, a cura di Paolo Rossi, *Storia della Scienza* Vol. 1.)

Girolamo Cardano

Successivamente Tartaglia sosterrà di aver fatto giurare a Cardano che non l'avrebbe mai reso pubblico ma il fatto è contestato dallo stesso Cardano. Cardano e Ferrari a quel punto lavorarono sul materiale fornito loro dal Tartaglia, andando oltre le sue scoperte e riuscendo a fornire una dimostrazione rigorosa della soluzione; è proprio in questo periodo che Ferrari risolve l'equazione di quarto grado. Il procedimento risolutivo individuato dal matematico bolognese richiedeva però la soluzione dell'equazione di terzo grado scoperta da Tartaglia, e che non poteva essere pubblicata a causa della promessa fatta da Cardano. Dopo qualche tempo tuttavia, quest'ultimo venne a sapere delle precedenti deduzioni di Scipione del Ferro e si recò quindi presso Annibale della Nave, genero di del Ferro e suo successore alla cattedra di matematica dell'Università di Bologna, nella speranza di riuscire a carpire le informazioni di cui aveva bisogno. Il della Nave mostrò a Cardano il manoscritto sul quale il suocero aveva annotato la soluzione dell'equazione, la stessa trovata da

Tartaglia; fu così che Cardano, sentendosi svincolato dalla promessa fatta, pubblicò il risultato noto come *formula di Cardano*. Tenendo presente dalla poesia che $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ esprimendo il procedimento in un'unica formula si ottengono le note *formule cardaniche*:

$$x^3 + px + q = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Talvolta risulta comodo scrivere l'equazione nella forme equivalenti rispettivamente rinascimentale e moderna:

$$x^3 = 3\dot{p}x + 2\dot{q} \qquad \text{e} \qquad x^3 - 3\dot{p}x - 2\dot{q} = 0$$

nelle quali sono state introdotte

$$\dot{p} = -\frac{p}{3} \qquad \text{e} \qquad \dot{q} = -\frac{q}{2}$$

segnate col puntino esclusivamente per evitare equivoci con le altre formule. In questo modo la formula di Cardano assume la forma più semplice:

$$x = \sqrt[3]{\dot{q} + \sqrt[2]{\dot{q}^2 - \dot{p}^3}} + \sqrt[3]{\dot{q} - \sqrt[2]{\dot{q}^2 - \dot{p}^3}}.$$

Pur se figlio illegittimo, astrologo, eretico e giocatore incallito, Cardano era un rispettabile professore a Bologna e Milano, tanto che ebbe una pensione dal Papa. Egli fu uno scrittore prolifico nel campo della medicina, delle scienze naturali e della matematica. Con l'uscita dell'*Artis Magnae sive de regulis algebraicis* nel 1545, in cui vennero pubblicate le soluzioni per le equazioni di terzo e quarto grado, pur riconoscendo la paternità delle rispettive scoperte a Ferrari e Tartaglia, divampò la polemica con Tartaglia. Infatti questo non fu sufficiente per evitare le ire di Tartaglia che offese pubblicamente Cardano chiamandolo "huomo di poco sugo"[1]. Ferrari difese accanitamente il maestro e ne seguì una lunga disputa (dalla quale, comunque, Cardano si mantenne sempre neutrale). Sfidato pubblicamente da Ferrari, Tartaglia fu umiliato e sconfitto e poco dopo vide il ritiro del suo incarico di professore.

Cardano e Ferrari divennero improvvisamente famosi, tuttavia nemmeno la loro fortuna durò a lungo: il figlio di Cardano fu condannato a morte per l'assassinio della moglie mentre l'altro suo figlio lo derubò per saldare i suoi debiti di gioco. Egli stesso venne poi imprigionato per aver calcolato l'oroscopo di Gesù Cristo; Ferrari invece, dopo aver perso le dita di una mano in una rissa, fu probabilmente avvelenato dalla sorella.

Negli anni successivi François Viète trovò un altro metodo di risoluzione: una volta eliminato il coefficiente di secondo grado si applica la sostituzione $x = y - \frac{p}{3y}$ che porta a un'equazione di secondo grado nella variabile $\eta = y^3$.[2]

Nuovi metodi per la soluzione di equazioni cubiche e biquadratiche furono mostrate più tardi dall'olandese Johan Jacob Ferguson nell'opera *Labyrinthus algebrae*.[3]

Metodo risolutivo

Cardano, Tartaglia e altri algebristi italiani rinascimentali pubblicarono propri metodi per la risoluzione delle equazioni di terzo grado. Tempo dopo François Viète, in seguito all'introduzione dei coefficienti letterali, pubblicò nell'*Isagoge in artem analyticam* un metodo molto lineare, che prevede la risoluzione di un'equazione di terzo grado completa riducendola, tramite una multipla sostituzione delle variabili, a una particolare equazione quadratica. Il procedimento è il seguente.

Un'equazione del tipo

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

si riconduce, applicando la seguente sostituzione

$$x = y - \frac{b}{3a}$$

(geometricamente questa traslazione posiziona la cubica in modo che abbia il proprio flesso sull'asse delle ordinate; generalmente le equazioni di questo tipo sono simmetriche rispetto al proprio punto di flesso), alla forma

$$y^3 + py + q = 0,$$

dove

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \quad \text{e} \quad q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}.$$

Si ottiene così un'equazione nella forma precedentemente descritta le cui soluzioni sono $y = u + v$ dove u e v sono le radici:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}; \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Da cui si ricava che

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

La formula per calcolare le soluzioni dell'equazione di terzo grado è quindi:

$$x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Bisogna ricordare che per il teorema fondamentale dell'algebra un'equazione di terzo grado deve avere tre soluzioni complesse, bisogna quindi considerare anche i risultati complessi delle radici.

Ora è necessario calcolare se la quantità che sta sotto le radici quadrate, indicata con Δ_{III}, è positiva o negativa.

- Se Δ_{III} è maggiore di 0, si calcolano i due numeri reali u e v uguali a

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta_{\text{III}}}}; \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta_{\text{III}}}},$$

e le soluzioni dell'equazione sono:

$$\begin{aligned} y_1 &= u + v; \\ y_2 &= u\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \\ y_3 &= u\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

- Se Δ_{III} è minore di 0 bisognerà convertire il numero complesso

  $$-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\Delta_{\text{III}}}$$

  nella forma trigonometrica $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e le tre soluzioni sono i risultati delle formule:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta}{3}; \\ y_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta + 2\pi}{3}; \\ y_3 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta + 4\pi}{3}. \end{aligned}$$

- Se Δ_{III} è uguale a 0, le soluzioni dell'equazione sono:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}; \\ y_2 &= y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

Problemi relativi alle soluzioni

Cardano incontrò però alcune difficoltà, dati i metodi dell'epoca, a trattare casi come

$$x^3 = 15x + 4.$$

Infatti applicando la formula risolutiva si trova

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

e la radice di un numero negativo non si sapeva trattare. Però, cercando una soluzione con i metodi geometrici di ʿUmar Khayyām, si trova che una soluzione è $x = 4$ e di conseguenza altre due soluzioni sono ottenibili risolvendo l'equazione

$$x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Quindi l'equazione ha tre radici reali, ovvero si ha la fattorizzazione

$$x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3}),$$

mentre la formula risolutiva porta a numeri non reali.

In generale si incorre in numeri non reali con equazioni della forma $y^3 + py + q$ per le quali

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 < -\left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Questa disuguaglianza caratterizza quello che veniva chiamato caso irriducibile, caso ritenuto intrattabile. Gli autori posteriori (primo fra tutti Rafael Bombelli) riprenderanno questi risultati giungendo alla introduzione dei numeri complessi, entità indispensabili per disporre di un procedimento generale per la risoluzione delle equazioni di terzo grado a coefficienti reali. I numeri complessi si sono poi rivelati fondamentali per moltissimi altri sviluppi matematici, in particolare per il teorema fondamentale dell'algebra.

Dimostrazione

Trasformazione della formula generale in una formula con soluzioni note

La tecnica utilizzata per trovare la formula risolutiva di un'equazione di terzo grado è quella di trasformarla in un'equazione con soluzioni note. Se prendiamo l'identità:

$$y = u + v$$

ed eleviamo tutto al cubo otteniamo:

$$\begin{aligned}
y^3 &= (u+v)^3 \\
y^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\
y^3 &= u^3 + v^3 + 3uv(u+v) \\
y^3 &= u^3 + v^3 + 3uvy \\
y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) &= 0.
\end{aligned}$$

Abbiamo così costruito un'equazione di terzo grado della quale conosciamo la soluzione ($y = u + v$). Possiamo notare che l'equazione ottenuta non possiede il termine di secondo grado e y^3 ha coefficiente 1. I passaggi successivi avranno l'obiettivo di trasformare una classica equazione di terzo grado in un'equazione simile a quella appena costruita.

Prendiamo quindi l'equazione di terzo grado e dividiamo tutti i termini per la costante a:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Abbiamo così portato il coefficiente di x^3 uguale ad 1. Ora dobbiamo annullare il termine di secondo grado, eseguendo una traslazione del tipo $x = y - k$ otteniamo:

$$(y-k)^3 + \frac{b}{a}(y-k)^2 + \frac{c}{a}(y-k) + \frac{d}{a} = 0.$$

Sviluppando le potenze di binomio si può notare che il coefficiente del termine di secondo grado è uguale a: $(-3k + \frac{b}{a})$ per annullarlo possiamo eguagliarlo a zero e ottenere:

$$-3k + \frac{b}{a} = 0 \iff k = \frac{b}{3a}.$$

La sostituzione che dovremmo operare sarà quindi:

$$x = y - \frac{b}{3a}.$$

Eseguendo i calcoli otteniamo un'equazione della forma:

$$y^3 + py + q = 0,$$

ove:

$$\begin{cases} p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} \\ q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}. \end{cases}$$

Abbiamo così trasformato una classica equazione di terzo grado in un'equazione con termine di secondo grado nullo e coefficiente del termine di terzo grado uguale ad 1. Ora dobbiamo rendere del tutto identiche l'equazione appena ottenuta con l'equazione iniziale di cui conoscevamo la soluzione. Per fare ciò dobbiamo eguagliare i termini di primo grado $-3uv$ a p e i termini noti $-(u^3 + v^3)$ a q risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -3uv = p \\ -(u^3 + v^3) = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} uv = -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q. \end{cases}$$

Se eleviamo al cubo la prima equazione del sistema otteniamo:

$$\begin{cases} u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q. \end{cases}$$

Il sistema ci chiede di trovare due incognite la cui somma è $-q$ e il prodotto è $-\frac{p^3}{27}$. Per risolvere un sistema del genere si può utilizzare l'equazione di secondo grado:

$$z^2 - rz + s = 0,$$

ove r e s rappresentano rispettivamente la somma e il prodotto delle nostre due incognite, risolviamo quindi l'equazione:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Dato che la soluzione della nostra equazione è $y = u + v$ possiamo scrivere:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Utilizzo dei numeri complessi per trovare le soluzioni dell'equazione

La formula risolutiva trovata presenta due radici cubiche che in campo reale hanno una sola soluzione ma in campo complesso ne hanno ben 3 ciascuna. Essa quindi fornisce in totale 9 risultati dei quali solo 3 di essi saranno una soluzione dell'equazione di terzo grado, questo perché il teorema fondamentale dell'algebra asserisce che un'equazione di grado n ammette precisamente n soluzioni.

Il problema deriva dal fatto che abbiamo elevato al cubo la prima equazione del sistema

$$\begin{cases} uv = -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

e quindi, dato che stiamo ragionando in campo complesso, le soluzioni del precedente sistema sono quelle soluzioni di

$$\begin{cases} u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

che risolvono $uv = -\frac{p}{3}$ e in particolare dato che $-\frac{p}{3}$ è un numero reale dobbiamo verificare quando uv è anch'esso reale.

È da notare inoltre che la formula risolutiva presenta anche delle radici quadrate che in campo complesso hanno sempre 2 soluzioni che dovremmo sempre prendere in considerazione.

Chiamiamo quindi $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ con il simbolo Δ_{III} e studiamo i due casi: Δ_{III} positivo e Δ_{III} negativo e il caso speciale in cui Δ_{III} è nullo.

Caso: $\Delta_{III}<0$

Possiamo riscrivere la formula risolutiva nel modo seguente:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta_{III}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta_{III}}}$$
$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-1(-\Delta_{III})}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-1(-\Delta_{III})}}$$
$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\Delta_{III}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\sqrt{-\Delta_{III}}}$$

Per calcolare le radici cubiche possiamo convertire i numeri complessi $-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\Delta_{\text{III}}}$ e $-\frac{q}{2}-i\sqrt{-\Delta_{\text{III}}}$ in forma trigonometrica. I due moduli quindi saranno uguali a:

$$\rho=\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(\sqrt{-\Delta_{\text{III}}}\right)^2}=\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}.$$

Gli angoli avranno la stessa ampiezza ma segno opposto dato che le parti immaginarie dei due numeri complessi sono opposte, li chiameremo quindi θ e $-\theta$.

Calcoliamo ora le radici cubiche dei numeri (ρ,θ) e $(\rho,-\theta)$. Il loro modulo è uguale a:

$$\sqrt[3]{\rho}=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3}=\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

e le radici saranno:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\Delta_{\text{III}}}}=\begin{cases}\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right) & (u_1)\\ \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right) & (u_2)\\ \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right) & (u_3)\end{cases}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\sqrt{-\Delta_{\text{III}}}}=\begin{cases}\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{-\theta}{3}+i\sin\frac{-\theta}{3}\right) & (v_1)\\ \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{-\theta+2\pi}{3}+i\sin\frac{-\theta+2\pi}{3}\right) & (v_2)\\ \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{-\theta+4\pi}{3}+i\sin\frac{-\theta+4\pi}{3}\right) & (v_3)\end{cases}$$

Le soluzioni saranno quindi della forma $y=u_i+v_j$ ma in realtà solo in tre casi il prodotto u_iv_j ci restituisce un numero reale (e quindi risolve $uv=-\frac{p}{3}$). Infatti esclusivamente nei casi u_1v_1, u_2v_3 e u_3v_2 la parte immaginaria si annulla.

Quindi le soluzioni dell'equazione saranno:

$$\begin{aligned}y_1&=u_1+v_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta}{3};\\ y_2&=u_2+v_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3};\\ y_3&=u_3+v_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}.\end{aligned}$$

Caso: $\Delta_{III}>0$

Nel caso in cui Δ_{III} sia maggiore di 0 esso avrà una radice quadrata reale e quindi esisteranno due numeri reali u_1 e v_1 uguali a

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta_{\text{III}}}};$$
$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta_{\text{III}}}}.$$

Come nel caso precedente non bisogna soffermarsi sulle radici reali ma bisogna analizzare anche cosa avviene quando il risultato delle radici cubiche è complesso. Per trovare anche i risultati complessi basterà moltiplicare i risultati reali u_1 e v_1 per le radici cubiche dell'unità; abbiamo quindi i 6 risultati:

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta_{\text{III}}}}, \quad u_2 = u_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad u_3 = u_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$
$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta_{\text{III}}}}, \quad v_2 = v_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad v_3 = v_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Anche questa volta, per controllare quando $u_i v_j = -\frac{p}{3}$, ci basta vedere quando $u_i v_j$ è un numero reale. Svolgendo i conti otteniamo quindi che le soluzioni dell'equazione di terzo grado sono:

$$y_1 = u_1 + v_1;$$
$$y_2 = u_2 + v_3 = u_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$
$$y_3 = u_3 + v_2 = u_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Caso: $\Delta_{\text{III}}=0$

Nel caso particolare in cui Δ_{III} sia uguale a 0 si può ricavare dalle formule trovate che le soluzioni sono:

$$y_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}};$$
$$y_2 = y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Soluzione in forma non depressa

Si consideri una generica cubica della forma:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Si calcolino

$$q = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$$
$$p = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{27a^3}$$
$$s = \sqrt[3]{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{p^2}{4}}}$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{p^2}{4}}}.$$

Le soluzioni dell'equazione $P(x) = 0$ sono date da:

$$\begin{aligned}
x_1 &= s + t - \frac{b}{3a};\\
x_2 &= -\frac{1}{2}(s+t) - \frac{b}{3a} + \frac{\sqrt{3}}{2}(s-t)i;\\
x_3 &= -\frac{1}{2}(s+t) - \frac{b}{3a} - \frac{\sqrt{3}}{2}(s-t)i.
\end{aligned}$$

Alternativamente, la soluzione generale dell'equazione di terzo grado in termini dei coefficienti può essere scritta in forma compatta nel seguente modo:

$$x_k = -\frac{b}{3a} - \frac{q}{3tu_k} + tu_k, \qquad k \in \{1,2,3\},$$

dove

$$u_1 = 1\,, \qquad u_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \qquad u_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

sono le tre radici cubiche dell'unità nel campo complesso. Essa può essere riscritta anche come

$$x_k = -\frac{1}{3a}\left(b + u_k C + \frac{\Delta_0}{u_k C}\right), \qquad k \in \{1,2,3\},$$

dove

$$C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} = -3at,$$

con

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= b^2 - 3ac = -3a^2q;\\
\Delta_1 &= 2b^3 - 9abc + 27a^2d = -27a^3r.
\end{aligned}$$

Casi particolari

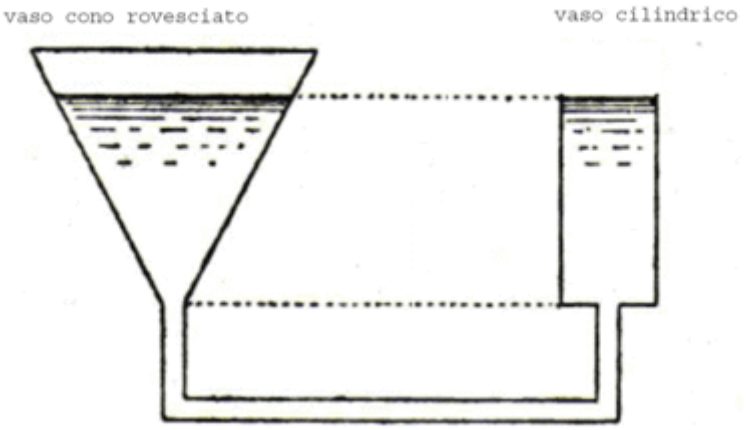
Caso 1: $x^3+x=c$

Un metodo di soluzione di tipo idraulico è stato trovato da A. Demanet nel 1898 e tratta il caso particolare[4][5]

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

in cui $a = 1, b = 0, c = 1, d < 0.$
L'equazione può essere, quindi, riscritta in modo semplificato uguagliando $k = -d$

$$x^3 + x = k.$$



Uno schizzo del sistema di vasi comunicanti

La soluzione si basa sulla teoria dei vasi comunicanti, mediante lo studio di un sistema formato da un vaso a cono rovesciato collegato ad uno cilindrico di eguale altezza, problemi di tensione superficiale possono rendere meno accurata la precisione della soluzione.

Ipotizziamo di avere il sistema descritto sopra, che l'area della base del cilindro sia uguale a 1 e che il rapporto tra il raggio r del cono e la sua altezza a sia:

$$\frac{r}{a} = \sqrt{\frac{3}{\pi}}.$$

Ora siano V_{cono} e V_{cilindro} rispettivamente il volume dell'acqua[6] presente nel cono e nel cilindro, e sia h l'altezza dell'acqua nei due recipienti[7] si ha che:

$$V_{\text{cilindro}} = h \cdot \text{area}_{\text{base}} = h \cdot 1 = h,$$

e che

$$V_{\text{cono}} = \pi r^2 \frac{h}{3}.$$

Tenendo conto della relazione tra l'altezza e il raggio del cono si ha che:

$$V_{\text{cono}} = \pi \left(h\sqrt{\frac{3}{\pi}} \right)^2 \frac{h}{3} = h^3.$$

Sia V_{tubo} il volume dell'acqua presente nel tubo che collega i due vasi e sia V_{acqua} il volume dell'acqua versata nei due vasi si ha che:

$$V_{\text{acqua}} = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cono}} + V_{\text{tubo}}$$
$$V_{\text{acqua}} = h + h^3 + V_{\text{tubo}}$$
$$h^3 + h = V_{\text{acqua}} - V_{\text{tubo}}.$$

Ponendo $k = V_{\text{acqua}} - V_{\text{tubo}}$, si ottiene:

$$h^3 + h = k.$$

Ottenendo così un'equazione di terzo grado la cui soluzione è l'altezza, misurabile, dell'acqua in uno dei due vasi comunicanti.

Più in generale, se si indicano con r_{cono} e r_{cilindro} rispettivamente il raggio del cono e del cilindro, con h l'altezza del cono e con x l'altezza raggiunta dall'acqua si può ottenere l'equazione:

$$\frac{1}{3}\pi\frac{(r_{\text{cono}})^2}{h^2}x^3 + \pi(r_{\text{cilindro}})^2 x = k.$$

Quindi scegliendo opportunamente i due recipienti si può risolvere anche un'equazione del tipo:

$$ax^3 + bx = c, \qquad \text{con } c > 0.$$

Caso 2: *d=bc/a*

Se l'equazione di terzo grado possiede la particolare caratteristica di avere il termine noto uguale a $\frac{bc}{a}$ l'equazione si presenta nella formula:

$$ax^3 + bx^2 + cx + \frac{bc}{a} = 0.$$

In questo caso si ha immediatamente almeno una soluzione reale dato che la formula può essere vista come:

$$ax^3 + bx^2 + cx + \frac{bc}{a} = a\left(x + \frac{b}{a}\right)\left(x^2 + \frac{c}{a}\right).$$

Una soluzione, quindi, è $x = -\frac{b}{a}$; le altre 2 saranno reali o no in base al segno di $\frac{c}{a}$.

Note

1. ^ Umberto Bottazzini, *La "grande arte": l'algebra del rinascimento*, in *Storia della scienza moderna e contemporanea*, diretto da Paolo Rossi, Vol. 1: Dalla rivoluzione scientifica all'età dei lumi, p. 72, ISBN 88-02-04152-0.
2. ^ (**EN**) Eric W. Weisstein, *Vieta's Substitution*, in *MathWorld*, Wolfram Research.
3. ^ Stephen Jordan Rigaud (a cura di), *Correspondence of Scientific Men of the Seventeenth Century*, vol. 2, Oxford University Press, 1841, pp. 515–.
4. ^ Francesco Daddi, *Strategie didattiche per promuovere un atteggiamento positivo verso la Matematica e la Fisica - Risolutore di equazioni ad acqua* (**PDF**), su *dm.unipi.it*, Università di Pisa. URL consultato il 28 dicembre 2012 (archiviato dall'url originale l'11 marzo 2014).
5. ^ Italo Ghersi, *Metodi fisici per la soluzione di equazioni algebriche*, in *Matematica dilettevole e curiosa*, appendice di R. Leonardi, 5ª ed., Milano, Ulrico Hoepli Editore, 2004 [1913], p. 253, ISBN 88-203-0469-4.
6. ^ L'unità di misura del volume dovrà appartenere allo stesso sistema di misura utilizzato per l'altezza, il raggio e l'area, quindi se, per esempio, l'altezza è misurata in centimetri l'area dovrà essere misurata in centimetri quadrati e il volume in centimetri cubi.

7. ^ L'altezza dell'acqua nei due vasi sarà la stessa dato che non contengono due liquidi diversi.

Bibliografia

- Carl Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Arnoldo Mondadori Editore, 1976, ISBN 88-04-33431-2.

Voci correlate

- Funzione cubica
- Equazione lineare
- Equazione di secondo grado
- Equazione di quarto grado
- Teorema fondamentale dell'algebra
- Numero complesso

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **equazione di terzo grado (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Cubic_polynomials?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Equazione di terzo grado*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Equazione di terzo grado*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- (EN) *cubic formula*, in *PlanetMath*.
- (EN) *Cardano's derivation of the cubic formula*, in *PlanetMath*.
- (EN) I.V. Proskuryakov, *Cubic equation*, in *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer e European Mathematical Society, 2002.
- (EN) I.V. Proskuryakov, *Cardano formula*, in *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer e European Mathematical Society, 2002.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 32448 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=32448) · LCCN (EN) sh85044516 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85044516) · BNF (FR) cb122693768 (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb122693768) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb122693768) · J9U (EN, HE) 987007552898505171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007552898505171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Equazione_di_terzo_grado&oldid=132711961"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 27 mar 2023 alle 22:56.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Equazione di quarto grado

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica si definisce **equazione di quarto grado** o **quartica** quell'equazione algebrica in cui il grado più alto dell'incognita è il quarto. Nella forma canonica, assume la forma:

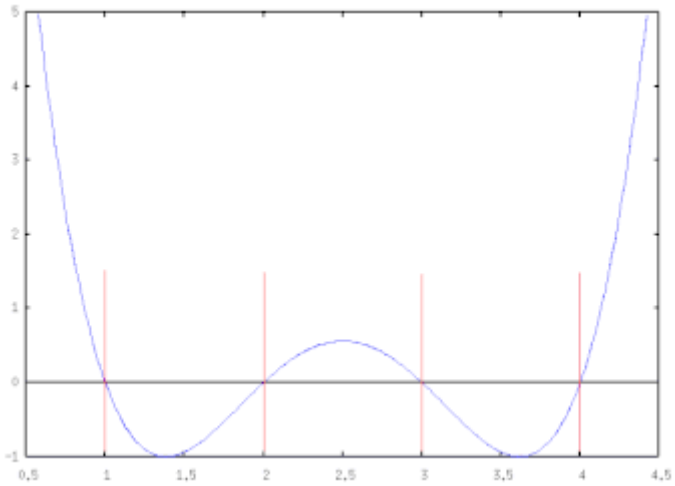


Grafico della quartica di equazione
$y = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \qquad (\text{con } a \neq 0).$$

La prima soluzione generale dell'equazione di quarto grado si deve al matematico italiano Ferrari, pubblicata però nel 1545 nell'*Artis Magnae sive de regulis algebraicis* di Cardano, che conteneva anche il metodo risolutivo dell'equazione di terzo grado. Si profuse allora grande impegno nel trovare le soluzioni generali di equazioni di quinto grado e superiore, ma invano: solo due secoli e mezzo dopo, i lavori di Ruffini del 1799, in maniera incompleta, e di Abel nel 1824, in maniera esaustiva, costituiscono complessivamente quello oggi noto come Teorema di Abel-Ruffini. In particolare Lagrange trovò che l'equazione risolvente di un'equazione di quinto grado è un'equazione di sesto, ricollegandosi ai risultati di Galois nella teoria dei gruppi.

Indice

Metodo risolutivo (passaggio per la risolvente)
Metodo alternativo
Metodo risolutivo (forma esplicita)
Bibliografia
Voci correlate
Collegamenti esterni

Metodo risolutivo (passaggio per la risolvente)

Il metodo risolutivo è imperniato sulla risoluzione di un'equazione di terzo grado, detta *risolvente*. Poiché la formula è veramente lunga e complessa, si preferisce solitamente riportare il metodo risolutivo in forma di algoritmo, alla maniera del metodo babilonese per la risoluzione dell'equazione di secondo grado.

Per trovare la soluzione tramite il metodo della risolvente, l'equazione deve avere la forma

$$1) \quad x^4 + px^2 + q = rx$$

La cosa è sempre possibile, in quanto ogni equazione nella forma

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

si riconduce alla 1) ponendo

$$z = x - \frac{a}{4}$$

Elenchiamo i passi da fare per ottenere la soluzione

1. Si porta il membro a sinistra ad essere il quadrato di un binomio. Per fare ciò, si aggiunge ad entrambi i membri dell'equazione la quantità $\left(2\sqrt{q} - p\right) x^2$, ottenendo

$$(x^2 + \sqrt{q})^2 = rx + \left(2\sqrt{q} - p\right) x^2$$

2. Si aggiunge ad entrambi i membri l'incognita y, e si porta il membro a sinistra ad essere il quadrato di un trinomio, aggiungendo le quantità opportune ad entrambi i membri:

$$2) \quad (x^2 + \sqrt{q} + y)^2 = (2\sqrt{q} - p + 2y)x^2 + rx + 2y\sqrt{q} + y^2$$

3. Si impone ora al membro a destra di essere il quadrato di un binomio in x e y, ossia si pone pari a zero il discriminante dell'equazione di secondo grado in x. Si ottiene così la risolvente di terzo grado, da cui si ricava la y:

$$4(2\sqrt{q} - p + 2y)(2y\sqrt{q} + y^2) - r^2 = 0$$
$$8y^3 + (24\sqrt{q} - 4p)y^2 + (16q - 8p\sqrt{q})y - r^2 = 0$$

4. Si sostituiscono le y trovate nella 2), e si estrae la radice quadrata di ambo i membri, cosa immediata per come è stata ricavata la y. Da questo passaggio si ottiene un'equazione di secondo grado.
5. Si risolve l'equazione di secondo grado, ottenendo due soluzioni per la x
6. Si divide l'equazione di partenza per le due radici trovate, e si estraggono le altre due radici.

Nel caso si sia dovuto eliminare il termine di terzo grado, occorre ovviamente sommare a tutte le radici un quarto del termine di terzo grado per ottenere le soluzioni dell'equazione di partenza.

I coefficienti p, q, r della 1) sono date dal sistema:

$$\begin{cases} p = b - \frac{3}{8}a^2 \\ r = -\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{2}ab - c \\ q = -\frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}a^2b - \frac{1}{4}ac + d \end{cases}$$

Note le soluzioni della 1), si trovano quelle dell'equazione di quarto grado:

$$z_i = x_i - \frac{a}{4}, \text{ con } i = 1, 2, 3, 4.$$

Metodo alternativo

Partendo dalla equazione ridotta è possibile dividere la quadrica nel prodotto di due equazioni di secondo grado.

$$\begin{aligned} 0 = x^4 + cx^2 + dx + e &= (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s) \\ &= x^4 + (p + r)x^3 + (q + s + pr)x^2 + (ps + qr)x + qs \end{aligned}$$

Eguagliando i coefficienti dei termini di pari grado:

$$\begin{aligned} 0 &= p + r \\ c &= q + s + pr \\ d &= ps + qr \\ e &= qs \end{aligned}$$

Eliminando la r si ottiene:

$$\begin{aligned} c + p^2 &= s + q \\ d/p &= s - q \\ e &= sq \end{aligned}$$

Ora è facile eliminare la s e la q effettuando le seguenti operazioni:

$$\begin{aligned} (c + p^2)^2 - (d/p)^2 &= (s + q)^2 - (s - q)^2 \\ &= 4sq \\ &= 4e \end{aligned}$$

Ponendo $P = p^2$, questa equazione si trasforma nella equazione cubica:

$$P^3 + 2cP^2 + (c^2 - 4e)P - d^2 = 0$$

Trovata una soluzione in P, e quindi in p, si può prendere:

$$\begin{aligned} r &= -p \\ 2s &= c + p^2 + d/p \\ 2q &= c + p^2 - d/p \end{aligned}$$

Metodo risolutivo (forma esplicita)

Dai metodi precedenti si può risalire (con molti conti) a una formula generale per la risoluzione delle equazioni di quarto grado in forma generica.

Il risultato esposto sotto si dimostra utile soprattutto in dimostrazioni di carattere astratto, dove, sostituendo e facendo i conti con pazienza, si possono ottenere espressioni generali per il valore di quantità di interesse.

Le quattro radici (x_1, x_2, x_3, x_4) di una generica quartica

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

con $a \neq 0$ si trovano con la seguente formula

$$x_{1,2} = -\frac{b}{4a} - Q \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4Q^2 - 2p + \frac{S}{Q}}$$

$$x_{3,4} = -\frac{b}{4a} + Q \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4Q^2 - 2p - \frac{S}{Q}}$$

dove p e S sono i coefficienti di secondo e terzo grado della quartica depressa associata:

$$p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2}$$
$$S = \frac{8a^2d - 4abc + b^3}{8a^3}$$

e dove

$$Q = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}\,p + \frac{1}{3a}\left(\Delta_0 + \frac{q}{\Delta_0}\right)}$$
$$\Delta_0 = \sqrt[3]{\frac{s + \sqrt{s^2 - 4q^3}}{2}}$$

con

$$q = 12ae - 3bd + c^2$$
$$s = 27ad^2 - 72ace + 27b^2e - 9bcd + 2c^3$$

Bibliografia

- Boyer, C., *Storia della matematica*, 1976, Arnoldo Mondadori Editore, ISBN 88-04-33431-2

Voci correlate

- Campo di Galois
- Equazione di primo grado
- Equazione di secondo grado
- Equazione di terzo grado
- Equazione di quinto grado
- Teorema di Abel-Ruffini

- Teoria dei gruppi

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Equazione di quarto grado*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Equazione di quarto grado*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Equazione_di_quarto_grado&oldid=129611809"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 26 set 2022 alle 22:32.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Sistema di equazioni di secondo grado

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

> **Questa voce o sezione sull'argomento matematica non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti**.

Mentre le equazioni di primo grado rappresentano una retta nel piano, le equazioni di secondo grado rappresentano una generica conica non degenere, (ovvero parabole, iperboli, ellissi) oppure una conica degenere (cioè un punto doppio, 2 rette coincidenti o due rette incidenti).

Un sistema di equazioni di primo grado è rappresentato da due rette che si intersecano (a meno che non siano parallele, nel qual caso il sistema non avrebbe soluzione) e le coordinate del punto in cui si intersecano sono le radici (o soluzioni) del sistema[1]. A stretto rigore, occorre considerare anche il caso in cui il sistema è costituito da rette linearmente dipendenti, ovvero tutti i coefficienti di una sono multipli, secondo un unico scalare, degli omologhi coefficienti dell'altra; in questo caso, il sistema è indeterminato (infinite soluzioni), poiché le due espressioni lineari rappresentano la stessa retta.

Poiché il grado di un sistema è dato dal prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono, segue necessariamente che un sistema di questo tipo deve contenere un'equazione di primo grado (retta) e un'equazione di secondo grado (rappresentante la conica)[2]; la retta e la conica, che possono essere:

- **esterne**, quando la retta non incontra la conica (in questo caso non ci sono soluzioni);
- **tangenti**, quando la retta tocca la conica in un solo punto, detto punto di tangenza (una sola soluzione o meglio due coincidenti);
- **secanti**, quando la retta interseca la conica in due punti distinti (le soluzioni sono le coordinate di questi due punti);

Due casi limite non contemplati precedentemente:

1º caso) retta e conica degenere che rappresenta la medesima retta;

2º caso) retta e conica degenere che rappresenta due rette incidenti una delle quali coincidente con la retta con cui è a sistema);

- **coincidenti**, quando la retta coincide con la conica (1º caso) (le soluzioni sono infinite, sono tutti i punti della retta);
- retta **strettamente contenuta** nella conica, quando la retta coincide con una delle due rette rappresentate dalla conica degenere (2º caso) (le soluzioni sono infinite, sono tutti i punti della retta);

[...]

Nei casi classici (retta e conica non degenere) il numero delle soluzioni è determinato dal Δ (*delta* o discriminante) dell'equazione di secondo grado risultante dal sistema delle due equazioni precedenti (previa opportuna sostituzione).

A seconda del Δ, infatti, abbiamo tre possibili situazioni:[3]

- $\Delta > 0$ (*delta positivo*): si ottengono due soluzioni reali distinte: i valori ottenuti sono le due ascisse o le due ordinate dei punti di intersezione.
- $\Delta = 0$ (*delta uguale a zero*): si avrà un'unica soluzione (più precisamente due soluzioni coincidenti), ovvero la retta è tangente alla conica.

  il valore ottenuto è l'ascissa o l'ordinata del punto di tangenza di retta e conica.

- $\Delta < 0$ (*delta negativo*): in questo caso non ci sono soluzioni nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ (perché le soluzioni conterrebbero la radice quadrata di un numero negativo), per cui la retta non interseca la conica, né la tocca.

Esempio

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x + 1 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

Usando il metodo di sostituzione si ottiene:

$$x^2 + 3x + 1 = 2x + 2$$

Risolvendo rispetto a x si ha::

$$x^2 + 3x - 2x + 1 - 2 = 0$$
$$x^2 + x - 1 = 0$$

Si calcoli ora il Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

dunque $\Delta > 0$ e pertanto si avranno due soluzioni reali distinte (le coordinate di ascissa x_1 , x_2 in cui la retta interseca la parabola). Ora si calcolano le radici dell'equazione di secondo grado:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Sostituendo x_1 , x_2 nell'equazione della retta $y = 2x + 2$ si ottengono le coordinate y_1 , y_2:

$$y_1 = 2 \cdot \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) + 2 = \sqrt{5} + 1$$
$$y_2 = 2 \cdot \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) + 2 = -\sqrt{5} + 1$$

Le soluzioni del sistema sono le coppie di coordinate:

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \sqrt{5} + 1 \right)$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{5}+1\right)$$

Note

1. ^ Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 3*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0431-0. p.347
2. ^ Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, *Matematica.Blu-Volume 2*, Zanichelli, 2010, ISBN 978-88-08-31344-7. p.969
3. ^ Massimo Bergamini, Graziella Barozzi, Anna Trifone, *Matematica.blu 2.0 (seconda edizione) Vol.3*, Zanichelli - Bologna, 2018, ISBN 978-88-08-53781-2. pp.274/349/421/476

Bibliografia

- Massimo Bergamini, Graziella Barozzi, Anna Trifone, *Matematica.blu 2.0 (seconda edizione) Vol.3*, Zanichelli - Bologna, 2018, ISBN 978-88-08-53781-2.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Sistema_di_equazioni_di_secondo_grado&oldid=117635188"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 30 dic 2020 alle 19:48.

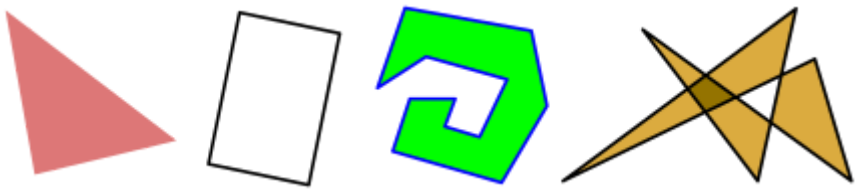
Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Poligono

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

*Disambiguazione – Se stai cercando altri significati, vedi **Poligono (disambigua)**.*

In geometria un **poligono** (dal greco πολύς (polys, "molti") e γωνία (gōnia, "angolo") è una figura geometrica piana delimitata da una linea spezzata chiusa. I segmenti che compongono la spezzata chiusa si chiamano lati del poligono e i punti in comune a due lati consecutivi si dicono vertici del poligono.



Alcuni poligoni: i primi due sono *convessi*, il terzo è *concavo*, il quarto è *intrecciato* e stellato e concavo

Indice

- **Definizione**
- **Sulla parte delimitata**
- **Classificazione**
  - Numero di lati
  - Convessità
  - Simmetria con uguaglianza
- **Proprietà**
  - Angoli
  - Area
- **Nomi di poligono**
- **Voci correlate**
- **Altri progetti**
- **Collegamenti esterni**

Definizione

Una definizione di poligono è la seguente.

> Un **poligono** è la parte di piano delimitata da una linea spezzata chiusa.

Ricordiamo che una linea spezzata è l'insieme finito e totalmente ordinato di segmenti, detti lati, che sono ordinatamente consecutivi e ordinatamente non adiacenti. Una linea spezzata è *chiusa* quando il secondo estremo dell'ultimo segmento coincide con il primo estremo del primo. Una linea spezzata è *semplice* (o *non intrecciata*) se due lati non successivi, secondo l'ordinamento assegnato, non si intersecano (a parte il primo e l'ultimo lato che possono avere in comune rispettivamente il primo e il secondo estremo).

Il punto in comune a due lati consecutivi è detto *vertice*.

Sulla parte delimitata

Il fatto che una linea spezzata chiusa non intrecciata delimiti effettivamente una porzione di piano è, per quanto intuitivo, un risultato non banale della geometria piana: si tratta di una conseguenza del teorema della curva di Jordan.

Una definizione costruttiva è la seguente: un punto P del piano appartiene al poligono se (con al più un numero finito di eccezioni) tutte le semirette uscenti da P intersecano la spezzata in un numero finito e dispari di punti distinti.

Classificazione

Numero di lati

Una prima classificazione di un poligono riguarda il suo numero di lati (vedi i nomi di poligono).

Convessità

Un poligono è:

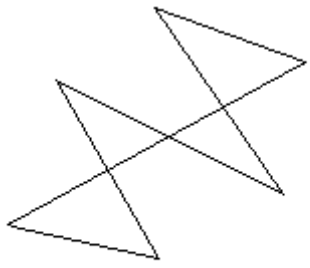
semplice
: se i lati del poligono non si intersecano.

complesso (o intrecciato)
: se non è semplice.

Un poligono semplice è:

convesso
: se ogni angolo interno è minore o uguale ad un angolo piatto (o, equivalentemente, se il prolungamento immaginario di ogni segmento che congiunge due suoi vertici va al di fuori del poligono).

concavo
: se anche un solo angolo interno è maggiore di $180°$ (o, equivalentemente, se il prolungamento immaginario di uno o più segmenti cade all'interno del poligono).



Un poligono intrecciato.

Simmetria con uguaglianza

In base alla simmetria, un poligono è:

equilatero

se tutti i suoi lati sono uguali.

equiangolo
: se tutti i suoi angoli sono uguali.

ciclico
: se tutti i suoi vertici giacciono su un'unica circonferenza.

regolare
: se è convesso, equilatero ed equiangolo (o, equivalentemente, se è ciclico ed equilatero).

irregolare
: se non è regolare.

Proprietà

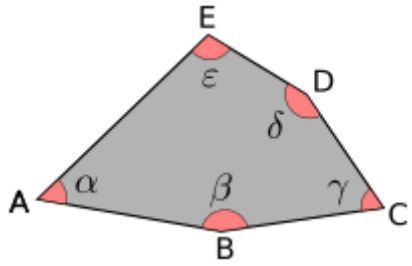
Angoli

La somma degli angoli interni di un poligono è pari a tanti angoli piatti quanti sono i suoi lati (n), meno due

$$180^\circ \times (n-2).$$

Ad esempio, il poligono in figura ha cinque lati, e quindi:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = (5-2) \times 180^\circ = 540^\circ.$$



Un poligono irregolare

La dimostrazione può essere svolta per induzione: in un triangolo la somma degli angoli è 180°, e preso un qualunque poligono una sua diagonale lo divide in due altri poligoni con un numero minore di lati, per cui si può far valere l'ipotesi induttiva.

La somma degli angoli esterni di un poligono convesso con n lati è uguale a

$$(360^\circ \times n) - [180^\circ \times (n-2)] = 180^\circ \times (n+2).$$

In quanto la somma di tutti gli angoli esterni ed interni è, evidentemente, uguale a n volte un angolo giro: sottraendo al totale la somma di quelli interni, avremo la somma di quelli esterni.

Area

Con la formula dell'area di Gauss è possibile calcolare l'area di un poligono con n vertici aventi coordinate cartesiane $(x_i; y_i)_{i=1,\ldots,n}$ nel modo seguente:

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} y_i\right|$$

con la convenzione che $(x_{n+1}; y_{n+1}) = (x_1; y_1)$.

Con questa formula possiamo ricavare una superficie di una qualsiasi figura piana attraverso le coordinate dei suoi vertici. È una formula molto utilizzata nella topografia e nella trigonometria.

Nomi di poligono

Distinzione in base al numero di lati e, quindi, di angoli:

N° lati	Nome
3	Triangolo
4	Quadrilatero
5	Pentagono
6	Esagono
7	Ettagono
8	Ottagono
9	Ennagono
10	Decagono
11	Endecagono
12	Dodecagono
13	Tridecagono
14	Tetradecagono
15	Pentadecagono
16	Esadecagono
17	Eptadecagono
18	Ottadecagono
19	Ennadecagono
20	Icosagono
21	Endeicosagono
22	Doicosagono
23	Triaicosagono
24	Tetraicosagono
25	Pentaicosagono
26	Esaicosagono

Voci correlate

- Poligono iperbolico
- Poligono regolare
- Poligono stellato
- Poliedro
- Politopo

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **poligono (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Polygons?uselang=it)**

- Problemi di geometria piana su Wikiversity

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Poligono*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Poligono*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- (EN) *Poligono*, su *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer e European Mathematical Society.
- (FR) poligoni, poliedri e politopi (http://www.mathcurve.com/polyedres/polyedres.shtml) da *Mathcurve*, *Encyclopédie des formes Mathématiques remarquables*

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 6803 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=6803) · LCCN (EN) sh85104637 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85104637) · GND (DE) 4175197-8 (https://d-nb.info/gnd/4175197-8) · BNF (FR) cb12266998h (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb12266998h) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb12266998h) · J9U (EN, HE) 987007563260005171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007563260005171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Poligono&oldid=132417927"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 9 mar 2023 alle 15:08.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

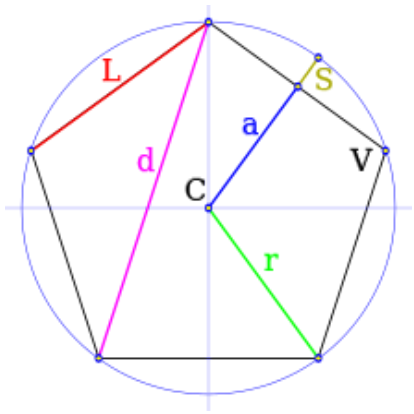
Poligono regolare

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Questa voce o sezione sull'argomento geometria non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti.

Un **poligono regolare** è un poligono convesso che è contemporaneamente equilatero (cioè ha tutti i lati congruenti fra loro) e equiangolo (cioè ha tutti gli angoli congruenti fra loro). Si tratta cioè di una porzione convessa di piano euclideo delimitato da una linea spezzata **chiusa**, formata da una successione di segmenti di uguale lunghezza (detti lati), che formano tra di loro angoli di uguale ampiezza. Il nome *poligono* individua una pluralità (*poli*) di angoli (*gonos*) e il termine regolare sottende a una loro uguaglianza. Come in ogni poligono, il numero di lati coincide con il numero degli angoli e con il numero di vertici, inoltre affinché la porzione di piano individuata da tale spezzata sia non nulla, vi devono essere almeno 3 lati.

Un poligono regolare con 3 angoli si definisce triangolo equilatero, con 4 quadrato, con 5 pentagono regolare, con 6 esagono regolare, e si procede per n angoli anteponendo il prefisso che individua il numero di angoli al suffisso *-gono* seguito dal termine *regolare* al fine di marcare la distinzione con un poligono generico.



Pentagono regolare inscritto in una circonferenza.

- *C* = centro della circonferenza circoscritta,
- *V* = un vertice del poligono,
- *L* = un lato del poligono,
- *d* = una diagonale del poligono,
- *r* = un raggio della circonferenza circoscritta,
- *a* = un apotema del poligono.

Indice

Prime proprietà
Angoli
Apotema
Perimetro e area
Pentagono, esagono e decagono
Tabella riepilogativa
Note
Voci correlate
Altri progetti
Collegamenti esterni

Prime proprietà

Ogni poligono regolare con n lati è inscrivibile e circoscrivibile in due circonferenze, infatti tracciando le bisettrici degli angoli interni si ottengono n triangoli isosceli tutti congruenti e con un vertice in comune, che risulta quindi essere il centro di tali circonferenze.

Un poligono regolare è simmetrico rispetto a ogni retta passante per un vertice e il centro. Pertanto, vi sono esattamente n assi di simmetria; se poi il numero di lati n è pari, allora il centro è centro di simmetria per il poligono. Oltre a queste simmetrie, vi sono anche altre trasformazioni lineari che lasciano invariato il poligono, ossia le

rotazioni rispetto al centro di angoli multipli di $360°/n$. L'insieme di tutte queste trasformazioni forma un gruppo, il gruppo diedrale di ordine $2n$.

Ogni angolo interno di un poligono ha ampiezza pari a $(1-2/n)\cdot 180°$, pertanto la somma degli angoli interni è $(n-2)\cdot 180°$. Gli angoli esterni invece misurano $360°/n$ e dunque la loro somma consiste in un angolo di $360°$.

Non tutti i poligoni regolari sono costruibili con riga e compasso, si dimostra infatti che una condizione necessaria e sufficiente perché ciò accada è che i fattori primi dispari del numero di lati siano primi di Fermat distinti. In particolare, il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono e l'esagono regolari sono costruibili con riga e compasso, mentre l'ettagono regolare non lo è.

Costruzione con riga e compasso di un esagono regolare

Angoli

Dato che gli n triangoli isosceli in cui è scomponibile il poligono sono tutti congruenti, è chiaro che ogni angolo al centro α ha ampiezza

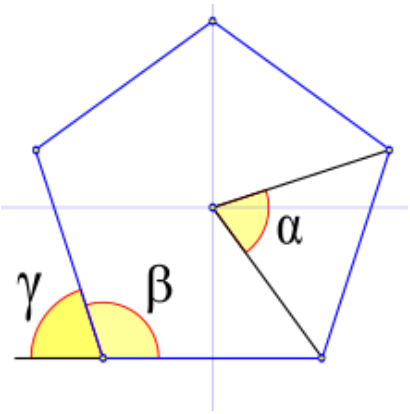
$$\alpha = \frac{360°}{n}.$$

Di conseguenza, dato che gli angoli alla base di tali triangoli isosceli hanno ampiezza che è la metà di ogni angolo interno β, si ha che

$$\beta = 2\cdot\frac{\beta}{2} = 180° - \alpha = \left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180°,$$

mentre ogni angolo esterno γ ha ampiezza

$$\gamma = 180° - \beta = \frac{360°}{n} = \alpha.$$



α = angolo al centro,
β = angolo interno,
γ = angolo esterno.

Dato che il numero di angoli interni, esterni e al centro è sempre n, segue che la somma degli angoli interni è

$$n\beta = (n-2)\cdot 180°,$$

mentre la somma di somma degli angoli al centro (o, equivalentemente, degli angoli esterni) è

$$n\alpha = n\gamma = 360°.$$

Apotema

Ogni poligono regolare è inscrivibile e circoscrivibile in due circonferenze concentriche. Il raggio della circonferenza inscritta è detto apotema e, chiaramente, coincide con la distanza dal centro di un qualsiasi lato del poligono. È facile ricavare una relazione tra l'apotema e il raggio della circonferenza circoscritta. Infatti, dato che i lati uguali di ognuno degli n triangoli isosceli che compongono il poligono sono raggi della circonferenza circoscritta e che gli angoli alla base hanno ampiezza $\beta/2$, risulta che l'apotema (che coincide con l'altezza di tali triangoli) misura

$$a = r\sin\frac{\beta}{2} = r\sin\left(90° - \frac{180°}{n}\right) = r\cos\frac{180°}{n},$$

ove r è il raggio della circonferenza circoscritta. Esprimendo l'apotema in funzione del lato l del poligono (nonché base del triangolo isoscele), si ha

$$a = \frac{l}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{l}{2}\tan\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{l}{2}\cot\frac{180^\circ}{n}.$$

Da queste due equazioni si può anche ricavare il raggio della circonferenza circoscritta in funzione del lato:

$$r = \frac{l}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}.$$

Perimetro e area

Il perimetro P_n è definito come la lunghezza della spezzata che delimita il poligono. Chiaramente risulta

$$P_n = nl,$$

o anche, usando le formule della sezione precedente,

$$P_n = 2nr\sin\frac{180^\circ}{n} = 2na\tan\frac{180^\circ}{n}.$$

Per calcolare l'area di un poligono regolare è sufficiente moltiplicare per n l'area dei triangoli isosceli che lo compongono. Quindi, dato che tali triangoli hanno come base un lato e come altezza l'apotema, il poligono regolare di n lati ha area

$$A_n = n\frac{al}{2} = \frac{nl^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{n},$$

o, equivalentemente,

$$A_n = nr^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cdot\cos\frac{180^\circ}{n} = \frac{nr^2}{2}\sin\frac{360^\circ}{n} = na^2\tan\frac{180^\circ}{n}.$$

Si noti che per n che tende all'infinito, l'area tende a

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \pi r^2,$$

perché

$$\lim_{n\to+\infty} n\tan\frac{180^\circ}{n} = \pi,$$

che non è altro che l'area del cerchio circoscritto, confermando così l'intuizione che al crescere del numero dei lati il poligono vada a "riempire" il cerchio circoscritto. Allo stesso modo si trova che

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = 2\pi r,$$

poiché

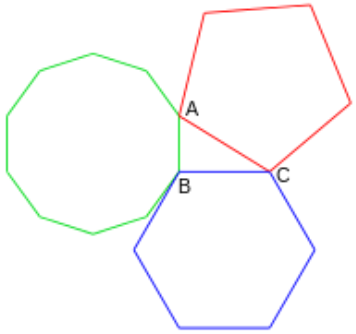
$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{180^\circ}{n} = \pi.$$

Pentagono, esagono e decagono

Nel libro XIII dei suoi Elementi, Euclide dimostra la seguente proposizione:

«Se si iscrive in un cerchio un pentagono equilatero, il quadrato del lato del pentagono è uguale alla somma dei quadrati dei lati dell'esagono e del decagono regolari che siano inscritti nello stesso cerchio.»

Di questa proposizione Euclide dà una lunga spiegazione geometrica, ma qui ci limiteremo a una verifica ottenibile conoscendo la lunghezza dei lati e applicando il teorema di Pitagora. Ammesso che il cerchio in cui si inscrivono i poligoni abbia raggio unitario, le formule che esprimono le lunghezze del lato L_5 del pentagono, L_6 dell'esagono e L_{10} del decagono, sono le seguenti:



I lati AC del Pentagono, BC dell'Esagono e AB del Decagono regolari, inscritti in cerchi di pari raggio, formano i lati di un triangolo rettangolo

- $L_5 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$;
- $L_6 = 1$;
- $L_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Allora:

$$\sqrt{L_6^2 + L_{10}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{5}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} = L_5$$

Quindi dato che la somma dei quadrati dei lati dell'esagono e del decagono dà il quadrato del lato del pentagono, ne consegue che il lato del pentagono è ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono i lati dell'esagono e del decagono.

Tabella riepilogativa

N.B.: Se si pensa a un poligono con un grandissimo numero di lati, l'angolo interno di quel poligono tende a diventare piatto, il lato tende a diventare nullo e l'area si avvicina di più a pi greco.

Costruzione del pentagono regolare

Costruzione approssimata
dell'ettagono regolare

Numero di lati, angoli e vertici	Poligono	Disegno	Angolo interno	Lato[1]	Area[1]	Animazione: costruzione con riga e compasso
3	Triangolo equilatero		60°	√3≅1.732	3/4·√3≅1.299	Costruzione esatta
4	Quadrato		90°	√2≅1.414	2	Costruzione esatta
5	Pentagono		108°	≅1.176	≅2.378	Costruzione esatta
6	Esagono		120°	1	3/2·√3≅2.598	Costruzione esatta
7	Ettagono		≅128,57°	≅0.868	≅2.736	Costruzione approssimata
8	Ottagono		135°	≅0.765	2·√2≅2.828	Costruzione esatta
9	Ennagono		140°	≅0.684	≅2.893	Costruzione approssimata
10	Decagono		144°	≅0.618	≅2.939	Costruzione esatta
11	Endecagono		≅147,27°	≅0.563	≅2.974	Costruzione approssimata
12	Dodecagono		150°	≅0.518	3	Costruzione esatta
13	Tridecagono		≅152,31°	≅0.479	≅3.021	Costruzione approssimata
14	Tetradecagono		≅154,29°	≅0.445	≅3.037	Costruzione approssimata
15	Pentadecagono		156°	≅0.416	≅3.051	Costruzione esatta
16	Esadecagono		157,5°	≅0.390	≅3.061	Costruzione esatta
17	Ettadecagono		≅158,82°	≅0.367	≅3.071	Costruzione esatta 34-gono, 51-gono 85-gono, 255-gono
18	Ottadecagono		160°	≅0.347	≅3.078	Costruzione approssimata
19	Ennadecagono		≅161,05°	≅0.329	≅3.085	Costruzione approssimata
20	Icosagono		162°	≅0.313	≅3.090	Costruzione esatta
257	257-gono		≅178.6°	≅0.024	≅3,141	Costruzione esatta
65537	65537-gono		≅179.9945°	≅0.000096	≅3,1416	Costruzione parziale

Note

1. Riferito al poligono regolare con raggio circoscritto pari a uno.

Voci correlate

- Geometria piana
- Poligono
- Poligono regolare improprio

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **poligono regolare (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Regular_polygons?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Poligono regolare*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Poligono regolare*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Poligono_regolare&oldid=128913674"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 20 ago 2022 alle 09:33.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.